目　　录

第一章　矩阵计算导论

1.1 引　　言

在本书中，我们将考虑如何把矩阵代数的一些简单概念有效地应用到光学成像和光的偏振等问题中。本章的讨论主要是针对至今未曾学过矩阵或行列式的读者；讨论是初步的，而且所涉及到的内容仅是为了了解本书其余各章节所必备的知识。

1857 年，数学家凯莱(Cayley)引进了矩阵概念，他将矩阵作为一个普通的速记记号，以列出一个完整列阵的线性联立方程组。矩阵列阵的计算规则与普通的数式稍有不同。不过，人们很快就发现了其运算规则并得到了发展。在 20 世纪 20 年代，当海森伯(Heisenberg)引进了量子力学的矩阵形式之后，物理学家对矩阵方法就愈感兴趣了。尽管在许多工程计算中都已采用了矩阵，不过，在光学中应用矩阵还是近期的事。

早在 1771 年，范德蒙德(Vandermonde)就提出了行列式，本书对此只占用较小的篇幅。最初将行列式称为“结式”，因为它是在用逐次消元法解方程组时出现的。在我们将要处理的大部分光学问题中，其行列式全等于 1，因而，这就为计算结束时的验算提供了方便。

现在来考虑如何引进矩阵的概念。假设有一对线性方程组

$$U = Ax + By$$
$$V = Cx + Dy$$

式中，A, B, C 和 D 都是已知常量，x 和 y 则都是变量。如果 x 和 y 都已知，那就能用这些方程组计算 U 和 V。对于大多数用

途，最方便的方法是将常量和变量分开证明。于是，将一对方程组写成：

$$\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

该方程与上面的一对方程组的含义完全一样。把一对方括弧内的每一组记号都看作是一个整体，并称之为矩阵。$\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$称为“列矩阵”或“列矢量”，因为每个矩阵只有一个列。

一般的矩阵是一个记号按行与列安排的矩形列阵。矩阵$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$有两行和两列，称为“二阶方阵”。以后将会遇到象$[P \quad Q]$这种形式的“行矩阵”（有时称为“行矢量”），其中的各个记号都称为“矩阵元素”，可将行矩阵水平地写成一行的形式。只有一个元素的矩阵刚好是一个普通的数字，或者是一个纯量。

如果每个矩阵只用一个记号表示，那么，可以更简略地写出一对方程组：

$$C_2 = SC_1$$

其中，C_1 表示列矩阵$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，$C_2$ 表示列矩阵$\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}$，$S$ 表示方矩阵$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$。

现在，假设 U 和 V 与另一对变量（比如说，另一对方程中的 L 和 M，）依次连接起来，因而：

$$L = PU + QV$$
$$M = RU + TV$$

写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} L \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}$$

亦即：

$$C_3 = KC_2$$

其中 C_3 表示$\begin{bmatrix} L \\ M \end{bmatrix}$，$K$ 表示$\begin{bmatrix} P & Q \\ R & T \end{bmatrix}$。当然，可用 x 和 y 分别来代替 U 和 V，而 U 和 V 分别确定了求 L 和 M 的方程组，因而，该方程组改为：

$$L = P(Ax + By) + Q(Cx + Dy)$$
$$M = R(Ax + By) + T(Cx + Dy)$$

即

$$L = (PA + QC)x + (PB + QD)y$$
$$M = (RA + TC)x + (RB + TD)y$$

可以将它写成

$$\begin{bmatrix} L \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} PA + QC & PB + QD \\ RA + TC & RB + TD \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

即

$$C_3 = FC_1$$

其中 F 表示 $\begin{bmatrix} PA + QC & PB + QD \\ RA + TC & RB + TD \end{bmatrix}$。不过，另外还可以写成：

$$C_3 = KC_2 = K(SC_1)$$

若上式是个普通的代数方程，则可重新写为

$$C_3 = KSC_1 = (KS)C_1$$

它只不过是改变了括弧的位置。将 KS 称为 K 和 S 的乘积。

再与上述连有 C_1 和 C_3 的方程进行比较，可写成下面两式：

$$C_3 = KSC_1 \quad 和 \quad C_3 = FC_1$$

于是

$$F = KS$$

也就是说，F 是 K 和 S 的乘积。

我们希望在矩阵中采用类似的方法，但必须定义两个矩阵的乘积，因为在普通代数里只定义了数之间的乘积。

1.2 矩阵乘法

现在来定义矩阵乘法，以便将上式从普通代数转化成矩阵代数。为此，用矩阵 S 乘矩阵 K，得到积矩阵 F，以定义两个矩阵的乘积，即

$$\begin{bmatrix} P & Q \\ R & T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} PA+QC & PB+QD \\ RA+TC & RB+TD \end{bmatrix}$$

检查上式右端的矩阵结构(乘积)，就容易看出这个矩阵是如何形成的。

在上式右端的矩阵中，其左上角元素为第一行第一列。它是取矩阵 K 的第一行(即$[P \quad Q]$)与矩阵 S 的第一列$\left(即\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}\right)$中相对应的元素相乘(即行的第一个元素乘以列的第一个元素，行的第二个元素乘以列的第二个元素)，得乘积 PA 和 QC，并将它们相加而得 $PA+QC$。

按照同样的方法，可以从 K 的第一行元素和 S 的第二列元素，构成 F 的第一行第二列的元素。从 K 的第二行元素和 S 的第一列元素，构成 F 的第二行第一列的元素。最后，从 K 的第二行元素和 S 的第二列元素，构成 F 的第二行第二列的元素。

在某些应用中，对矩阵元素加以下标是有益的。例如，将一个列矩阵 A 写为：

$$A=\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$$

下标表示该元素在列矩阵中的位置。将一个方矩阵 S 写成：

$$S=\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$$

式中，第一个下标表示该元素在方阵中的行数，第二个下标表示

该元素在方阵中的列数。若用下标来重新表示两个方阵 K 和 S，则：

$$K=\begin{bmatrix}K_{11} & K_{12}\\ K_{21} & K_{22}\end{bmatrix} \quad 和 \quad S=\begin{bmatrix}S_{11} & S_{12}\\ S_{21} & S_{22}\end{bmatrix}$$

于是，乘积 $F=KS$ 变成

$$\begin{bmatrix}F_{11} & F_{12}\\ F_{21} & F_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}K_{11}S_{11}+K_{12}S_{21} & K_{11}S_{12}+K_{12}S_{22}\\ K_{21}S_{11}+K_{22}S_{21} & K_{21}S_{12}+K_{22}S_{22}\end{bmatrix}$$

即

$$\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{2} K_{1i}S_{i1} & \sum_{i=1}^{2} K_{1i}S_{i2}\\ \sum_{i=1}^{2} K_{2i}S_{i1} & \sum_{i=1}^{2} K_{2i}S_{i2}\end{bmatrix}$$

这就给出了一个表示矩阵中任何一个元素的一般公式：

$$F_{RT}=\sum_{i=1}^{i_{max}} K_{Ri}S_{iT}$$

其中 F_{RT} 表示 F 的第 R 行第 T 列的元素，K 和 S 也照此类推。（这里使用的求和符号表示，重复的下标 i 要逐次地取所有的可能值，有时它被省略了）。

至今，我们只是讨论到 2×2 矩阵和 2×1 列矩阵；但是，矩阵的概念远比这些内容丰富得多。在本书中，我们还需用 2×2，3×3 和 4×4 方阵，2×1，3×1 和 4×1 列矩阵以及 1×2，1×3 和 1×4 行矩阵。上述所有矩阵的含义都是按同样方式来定义的。例如，如果有含有四个未知元的四个方程组：

$$\begin{aligned}B_1&=K_{11}A_1+K_{12}A_2+K_{13}A_3+K_{14}A_4\\ B_2&=K_{21}A_1+K_{22}A_2+K_{23}A_3+K_{24}A_4\\ B_3&=K_{31}A_1+K_{32}A_2+K_{33}A_3+K_{34}A_4\\ B_4&=K_{41}A_1+K_{42}A_2+K_{43}A_3+K_{44}A_4\end{aligned}$$

这些方程组既可表示成矩阵形式

$$
\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix}
$$

也可表示成更简略的形式

$$B = KA$$

在这种情况下，就可用方程

$$B_{R1} = \sum_{i=1}^{4} K_{Ri} A_{i1}$$

来计算列矩阵 B 的第 R 个元素。

应当指出，形成积矩阵元的上述规则仍可应用到用 A 代替 S，用 B 代替 F 的情况；不过，因为 A 和 B 现在都是 4×1 列矩阵，所以 F 和 S 的第二个下标(T)都仅仅是1。于是，可以写得更加简单：

$$B_R = \sum_{i=1}^{4} K_{Ri} A_i$$

(其中 B 和 A 显然都是矢量。)

这条矩阵乘法规则十分重要，以后将会经常用到。学生通过练习许多习题来全部熟悉掌握这条规则，是非常重要的。下面作一些说明。

1.2.1

若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ 和 $B = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$

则

$$
AB = \begin{bmatrix} (1\times2)+(3\times1) & (1\times6)(3\times-4) \\ (5\times2)+(7\times1) & (5\times6)(7\times-4) \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 2+3 & 6+(-12) \\ 10+7 & 30+(-28) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 17 & 2 \end{bmatrix}
$$

但

$$BA=\begin{bmatrix}(2\times1)+(6\times5) & (2\times3)+(6\times7)\\(1\times1)+(-4\times5) & (1\times3)+(-4\times7)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2+30 & 6+42\\1-20 & 3-28\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}32 & 48\\-19 & -25\end{bmatrix}$$

读者应当注意，AB 和 BA 完全不同。在矩阵乘法中，乘法的次序必须保持不变：方程 $AB=BA$ 不成立。用数学术语来讲，矩阵乘法是不可交换的。

1.2.2

若 $C=\begin{bmatrix}3 & 1 & 4\\2 & 1 & 6\\1 & 3 & 4\end{bmatrix}$ 和 $D=\begin{bmatrix}-5\\3\\1\end{bmatrix}$

则

$$CD=\begin{bmatrix}(3\times-5)+(1\times3)+(4\times1)\\(2\times-5)+(1\times3)+(6\times1)\\(1\times-5)+(3\times3)+(4\times1)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-15+3+4\\-10+3+6\\-5+9+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8\\-1\\8\end{bmatrix}$$

如果希望求乘积 DC，那么，首先用 D 的第一行元素与 C 的第一列元素相乘。而 D 的第一行只有一个元素 $[-5]$，但 C 的第一列却有 3 个元素 $\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$。因此，这种乘积不能成立。只有当左乘矩阵 C 的列数和右乘矩阵 D 的行数相同；乘积 CD 才能成立，这时，C 和 D 是“相容”的。

1.2.3

令 $E=[3\quad 1\quad 4]$ 和 $F=\begin{bmatrix}1 & 5 & 9\\ 2 & 4 & -3\\ 6 & 1 & 3\end{bmatrix}$

则

$$\begin{aligned}EF&=[(3\times1)+(1\times2)+(4\times6)\quad (3\times5)+(1\times4)+(4\times1)\quad (3\times9)-(1\times3)+(4\times3)]\\&=[(3+2+24)\quad(15+4+4)\quad(27-3+12)]\\&=[29\quad 23\quad 36]\end{aligned}$$

倘若将相乘的次序颠倒，则乘积 FE 不能成立，因为 F 有三列，而 E 仅有一行。

1.2.4

令 $H=[3\quad 1\quad 6]$ 和 $K=\begin{bmatrix}2\\4\\7\end{bmatrix}$

若将 H 作为左乘因子，K 作为右乘因子，则它们是相容的，因为 H 有三行，K 也有三列。于是

$$HK=[(3\times2)+(1\times4)+(6\times7)]=(6+4+42)=52$$

它只是一个普通的数字。

现在来考虑用 K 左乘 H 时会出现什么结果。这两个矩阵仍然是相容的，因为 K 只有一列，H 也只是一行。于是

$$KH=\begin{bmatrix}2\\4\\7\end{bmatrix}[3\quad 1\quad 6]=\begin{bmatrix}2\times3 & 2\times1 & 2\times6\\ 4\times3 & 4\times1 & 4\times6\\ 7\times3 & 7\times1 & 7\times6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}6 & 2 & 12\\ 12 & 4 & 24\\ 21 & 7 & 42\end{bmatrix}$$

从这对矩阵来看，HK 只是一个数字，但 KH 却是一个 3×3 方阵。

1.3 零 矩 阵

若 $L=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$ 和 $M=\begin{bmatrix}7 & 1\\4 & 2\end{bmatrix}$(或任何的二阶方阵)，则 LM 和 ML 都是 $\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$，矩阵$\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$叫做“二阶零矩阵”。通常，用记号 O 来表示零矩阵，并用普通代数中的零来代替它。

任何方阵或矩形矩阵在具有零的形式 O 时，它的所有元素都是零。因此，用一个(相容形式的)零矩阵与任何矩阵左乘或右乘，其结果都是一个零矩阵。

1.4 单 位 矩 阵

1.4.1

若 $$P=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} \quad 和 \quad Q=\begin{bmatrix}3 & 5\\2 & 6\end{bmatrix}$$

则 PQ 和 QP 都等于$\begin{bmatrix}3 & 5\\2 & 6\end{bmatrix}$，也就是 Q。矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ 具有这样的特性：假如将它与任何二行矩阵左乘或与任何二列矩阵右乘，那么，结果不变，还是原有的二行矩阵或二列矩阵。人们称矩阵$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$为“二阶单位矩阵”。

单位矩阵通常由 I 表示，其他的例子有 3×3 阶矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，$4\times4$ 阶矩阵$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$等等。

n 阶单位矩阵有 n 行和 n 列。除了"主对角"元素，即从左上角到右下角的元素之外，其他元素都是零；所有主对角元素全等于1。

1.5 对角矩阵

单位矩阵是"对角矩阵"的一种特殊情况；后者定义为，所有的非对角元素都是零的方阵。主对角元素则可以是任意的数字。例如，$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & -1/2\end{bmatrix}$都是对角矩阵。

若两个对角矩阵相乘，则其乘法的次序是无关紧要的；这种乘法十分简单，而且所得到的矩阵也是对角矩阵。

1.5.1

$$\text{若}\quad A=\begin{bmatrix}a_1 & 0 & 0\\0 & a_2 & 0\\0 & 0 & a_3\end{bmatrix}\quad\text{和}\quad B=\begin{bmatrix}b_1 & 0 & 0\\0 & b_2 & 0\\0 & 0 & b_3\end{bmatrix}$$

$$\text{则}\qquad AB=BA=\begin{bmatrix}a_1b_1 & 0 & 0\\0 & a_2b_2 & 0\\0 & 0 & a_3b_3\end{bmatrix}$$

（读者应当注意，在这个例子中，已用代数符号，而不是算术数字来表示矩阵元素。象普通代数一样，可以用1来表示一个未知数，其余的2、3也是这样。）

1.6 多重乘积

如果希望求三个矩阵 L, M 和 N 的乘积，那么，可以按两种方式未进行：

(a) 先求乘积(MN)，然后用 L 与其左乘。

(b) 先求乘积(LM)，然后用 N 与其右乘。

假设保持这三个矩阵的次序不变，那么这两种方式都会给出同一个结果。于是，$L(MN)=(LM)N$。象普通代数一样，两者都称为 LMN。

1.6.1

令 $$L=\begin{bmatrix}1 & 3\\4 & 2\end{bmatrix},\quad M=\begin{bmatrix}2 & 1\\3 & 1\end{bmatrix}$$

和 $$N=\begin{bmatrix}4 & 2\\1 & 3\end{bmatrix}$$

则 $$L(MN)=\begin{bmatrix}1 & 3\\4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9 & 7\\13 & 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}48 & 34\\62 & 46\end{bmatrix}=LMN$$

而 $$(LM)N=\begin{bmatrix}11 & 4\\14 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 2\\1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}48 & 34\\62 & 46\end{bmatrix}=LMN$$

结果如上所述。

因此，虽然矩阵乘法不是"可交换的"，但是是"可结合的"。引伸这条原理，不难证明四个或更多个矩阵

$$PQRS=P(QR)S=(PQR)S,$$

等等的乘积。

1.7 矩阵的加法和减法

假设两个矩阵 M 和 N 都有相同的行数和相同的列数，只要将每一对相对应的矩阵元素相加或相减，就能求得这两个矩阵的和与差。若 $P=M+N$，则 $P_{iK}=M_{iK}+N_{iK}$。因为零矩阵的所有元素都是零，故 $M\pm 0=M$ 和 $M-M=0$。因而，矩阵也服从"分配律"。亦即

$$A(B+C)=AB+AC$$

1.7.1 举例

令
$$A=\begin{bmatrix}2 & 0\\1 & 1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}3 & 0\\1 & 2\end{bmatrix}$$

和
$$C=\begin{bmatrix}-1 & 1\\2 & 0\end{bmatrix}$$

则
$$A(B+C)=\begin{bmatrix}2 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 2\\5 & 3\end{bmatrix}$$

和
$$AB+AC=\begin{bmatrix}6 & 0\\4 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 2\\5 & 3\end{bmatrix}$$

综上所述，显然，若同一个矩阵本身相加 λ 次，则矩阵的每个元素都将与普通的数字(或"纯量") λ 相乘。有时将这种运算称为矩阵的"纯量乘法"。采用矩阵乘法，即若用其对角元素都是 λ 的对角矩阵 λI 左乘或右乘原矩阵，则也能得到同样的结果。

上面已考虑了矩阵相乘，相加和相减的一些规则。一个矩阵和另一个矩阵相除的运算也是有用的，本书将经常用到一对 2×2 阶方阵，并且这两个方阵互成"倒数"。不过，在考虑这个题目之前，有必要简略地讨论矩阵的转置和行列式的概念。

1.8 转置矩阵

从一个矩阵(比如说是 A)的行和列互换所得到的另一个矩阵，称之为矩阵 A 的"转置"矩阵，记为 A^T。若矩阵 A 有 m 行和 n 列，则其转置矩阵 A^T 应有 n 行和 m 列。

1.8.1

若 $A=\begin{bmatrix}3 & 4\\2 & 1\end{bmatrix}$，则

$$A^T=\begin{bmatrix}3 & 2\\4 & 1\end{bmatrix}。$$

1.8.2

若 $B=\begin{bmatrix}3\\1\\4\end{bmatrix}$,则

$$B^T=[3 \quad 1 \quad 4]。$$

1.8.3

若 $C=[5 \quad 7 \quad 1]$,则

$$C^T=\begin{bmatrix}5\\7\\1\end{bmatrix}。$$

矩阵转置及其乘法有一条重要的定理：两个矩阵乘积的转置，等于每一个矩阵的转置再倒换次序后的乘积。亦即

$$(AB)^T=B^TA^T$$

1.8.4

若 $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\5 & 7\end{bmatrix}$ 和 $B=\begin{bmatrix}4 & 1\\3 & 6\end{bmatrix}$,

则 $(AB)=\begin{bmatrix}13 & 19\\41 & 47\end{bmatrix}$,

于是 $(AB)^T=\begin{bmatrix}13 & 41\\19 & 47\end{bmatrix}$。

又 $A^T=\begin{bmatrix}1 & 5\\3 & 7\end{bmatrix}$ 和 $B^T=\begin{bmatrix}4 & 3\\1 & 6\end{bmatrix}$

所以 $B^TA^T=\begin{bmatrix}13 & 41\\19 & 47\end{bmatrix}$

(学生应该自己验算这些乘法。)

应当注意，倘如 A 和 B 都是矩形矩阵，那么，只有当 A 左乘 B 时，A 和 B 才相容；同理，只有当 B^T 左乘 A^T 时，B^T 和 A^T

才相容，这些都符合上述定理的要求。

采用矩阵乘法的结合律特性，不难证明

$$(ABC)^T=((AB)C)^T=C^T(AB)^T=C^TB^TA^T。$$

任意多个矩阵的乘积也相类似，即

$$(ABCDEF)^T=F^TE^TD^TC^TB^TA^T,$$

等等。

1.9 行 列 式

任何一个方阵都伴有一个"行列式"，这个行列式可以是单一数字或数量。一个矩阵 M，其行列式不是用方括弧作标记，而是用两条竖线把整个列阵夹起来；或者简单的记作 det(M)。

$$M\text{ 的行列式}=\begin{bmatrix}M_{11} & M_{12} & M_{13}\\ M_{21} & M_{22} & M_{23}\\ M_{31} & M_{32} & M_{33}\end{bmatrix}=\det(M)$$

对于阶数 n 较高的方阵，计算其行列式十分繁琐；它牵涉到对大量正负交替出现的矩阵元素的 n 次乘积求和，因而，即使 $n=4$，也会包含有 $4!=24$ 个乘积。

不过，本书只涉及 2×2 阶矩阵的行列式，计算这些行列式的规则非常简单：先求两个主对角元素(左上角和右下角元素)的乘积，然后减去其他两个元素的乘积。

因而，若矩阵 $P=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}$，则

$$\det(P)=\begin{vmatrix}A & B\\ C & D\end{vmatrix}=(AD-BC),$$

式中 A, B, C 和 D 都是某些普通数字或纯量。

1.9.1

若 $P=\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 9\end{bmatrix}$, 则

$$\det(P)=(1\times 9)-(2\times 3)=9-6=3。$$

现在需要用到下述行列式定理：两个方阵乘积的行列式与其行列式的乘积相等。

1.9.2

若 $P=\begin{bmatrix}6 & 3\\5 & 7\end{bmatrix}$, 则

$$\det(P)=(6\times 7)-(3\times 5)=42-15=27。$$

又若 $Q=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}$, 则

$$\det(Q)=(1\times 4)-(2\times 3)=4-6=-2。$$

于是，$$(\det P)\times(\det Q)=(27)\times(-2)=\underline{-54}$$

另一方面，如果有一个积矩阵

$$PQ=\begin{bmatrix}15 & 24\\26 & 38\end{bmatrix},$$

又得

$$\begin{aligned}\det(PQ)&=(15\times 38)-(24\times 26)\\&=570-624=\underline{-54}\end{aligned}$$

这条定理可以引伸到任意多个矩阵的乘积：

$\det(PQRST,$ 等$)=\det(P)\det(Q)\det(R)\det(S)\det(T)$,

等。因而，这条定理经常是检验矩阵相乘是否正确的一个简便方法。

应当注意，对方阵来说，虽然矩阵乘积 PQ 一般与乘积 QP 不等同，但是，PQ 和 QP 这两个矩阵应当具有相同的行列式。就行列式而言，矩阵乘法的次序没有关系。

1.9.3

在 1.2.1 节中求解，若

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\5 & 7\end{bmatrix} \quad 和 \quad B=\begin{bmatrix}2 & 6\\1 & -4\end{bmatrix}$$

则
$$AB=\begin{bmatrix}5 & -6\\17 & 2\end{bmatrix},$$

但
$$BA=\begin{bmatrix}32 & 48\\-19 & -25\end{bmatrix}。$$

在这种情况下，

$$\det(AB)=10+102=\underline{\underline{112}}$$

$$\det(BA)=-800+912=\underline{\underline{112}}$$

当然 $$(\det A)\times(\det B)=(-8)\times(-14)=\underline{112}$$

将行列式为零的方阵称之为"奇异方阵"。本书中涉及到的矩阵几乎都是非奇异的，也就是说，它们都具有不等于零的行列式。

1.10 矩阵的除法和反演

在普通算术中，如果用同一个数量 k 去除一整列的数字，那么，常用的简便方法是采用倒数形式 k^{-1}，并将它重复地作为乘积因子。同样，若要求用一个方阵 M 去除其它的矩阵，有效的方法也是求出方阵 M 的逆矩阵 R。设 M 是非奇异方阵，则只存在一个而且也仅仅是一个逆矩阵 R，其特性是，(MR)和(RM)两者都等于同阶的单位矩阵 I。为方便起见，称这些矩阵为逆矩阵 M^{-1}，它有两种不同的运算方法，既可将它作为左乘因子写成 $M^{-1}B$，在这种情况下，已用 M 左除 B；也可将它作为右乘因子写成 BM^{-1}，在这种情况下，已用 M 右除 B。

求逆矩阵的过程称为"反演"，对高阶数的矩阵来说，反演是

十分繁琐的。其规则是求原始矩阵的"转置伴随矩阵"，即先将矩阵转置，然后被行列式除。

不过，本书仅涉及到 2×2 阶矩阵的反演，因而计算过程十分简单。在这种情况下，只要将矩阵对角线上相对的两个元素互相换位，同时改变右上角和左下角元素的正负号，就可求得"转置伴随"矩阵。

因此，对一个矩阵 $M=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}$ 来说，即可写出：

$$\operatorname{adj}(M)=\begin{bmatrix}D & -C\\ -B & A\end{bmatrix}。$$

必须先进行转置

$$(\operatorname{adj} M)^T=\begin{bmatrix}D & -B\\ -C & A\end{bmatrix}。$$

最后，用其行列式

$$\det(M)=(AD-BC)$$

去除每一个元素。

应当指出，在求行列式时，上述三个矩阵都会给出同一个结果。

1.10.1

为了验证上述计算程序是否正确，可以验算如下：

$$\begin{aligned}M(\operatorname{adj} M)^T&=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D & -B\\ -C & A\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}(AD-BC) & (-AB+BA)\\ (CD-DC) & (-BC+AD)\end{bmatrix}\\&=(AD-BC)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\det(M)I\end{aligned}$$

(式中，I 是单位矩阵。)

需要反演的大部份 2×2 阶矩阵碰巧都有一个等于 1 的行列式。有时称这些矩阵为"幺模矩阵"，其反演规则可以更简单地阐述为：欲反演 2×2 阶幺模矩阵，先互换两个主对角元素，后改变其余两个元素的正负号，变化后留下来的矩阵就是该矩阵的逆阵。

因此 $M=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}$，则

$$M^{-1}=\begin{bmatrix}D & -B\\ -C & A\end{bmatrix}。$$

不需要计算！

最后，象转置矩阵一样，为了求出几个矩阵乘积的倒数，必须先使每一个矩阵倒置，然后将它们倒序相乘。亦即

$$(PQRS)^{-1}=S^{-1}R^{-1}Q^{-1}P^{-1}$$

等。

为了证明这一点，从矩阵 $(PQRS)(S^{-1}R^{-1}Q^{-1}P^{-1})$ 并从 $SS^{-1}=I$ 着手求解，这一列矩阵中的居中部分将产生一连串的单位矩阵，剩下来的就作为单个单位矩阵的最后结果。

1.11 矩阵的对角化

在希望用同一个非奇异矩阵 M 反复相乘的多重系统中，特别有效的方法是求出象矩阵 $M=F\Lambda F^{-1}$ 中的"对角化矩阵" F。式中，Λ 是对角矩阵，F^{-1} 是 F 的逆矩阵。假设已分别求得 F 和 Λ 两个矩阵，又因为 $F^{-1}F=I$，则矩阵 M 的平方为

$$M^2=MM=(F\Lambda F^{-1})(F\Lambda F^{-1})$$
$$=F\Lambda I\Lambda F^{-1}=F\Lambda^2F^{-1}。$$

同理 $\quad M^3=MM^2=(F\Lambda F^{-1})(F\Lambda^2F^{-1})=F\Lambda^3F^{-1}$

于是，一般来说，

$$M^N = F\Lambda^N F^{-1}。$$

因此，一旦求得原始矩阵 M 的对角化变换，只要取对角化矩阵 F 的 N 次幂，便可得到 M 的 N 次幂；而为了取 F 的 N 次幂，只需用 λ_r^N 代替 F 的第 r 个对角元素 λ_r 即可。

通常称矩阵 Λ 的各个对角元素 $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_r\cdots$ 为原始矩阵 M 的"特征根"或者"特征值"，并且，相应地称对角矩阵 F 的各个列为原始矩阵 M 的"特征矢"或者"特征矢量"。

为了加深理解，从方阵 F 中取出第 r 列 F_r。为此，用一个列矢量 C_r 右乘 F，便可得到 F_r，其中，列矢量 C_r 的第 r 个元素为 1，其它元素皆为零。

如果将矩阵 M 左乘列矢量 $F_r = FC_r$ 时，会发生什么情况呢？由此求得

$$MF_r = (F\Lambda F^{-1})(FC_r) = F\Lambda C_r = F_r C_r = \lambda_r F_r$$

（因为 λ_r 是个纯量。）换言之，矩阵 M 乘以矢量 F_r，等于同一个矢量 F_r 乘以纯量 λ_r。列矢量 F_r 称为矩阵 M 的第 r 个特征矢量，λ_r 是相应的第 r 个特征值。本书涉及的需要进行对角化的矩阵全都是 2×2 阶矩阵，它们只有两个列特征矢量 F_1 和 F_2，其特征值分别为 λ_1 和 λ_2。

（反过来，也可以将 M 作为右乘因子、代替左乘因子进行运算，得到的特征矢量就是逆矩阵 F^{-1} 的行矢量。本书将采用列特征矢量。）

1.12 2×2 阶幺模矩阵的特征值和特征矢量

如果希望将一个方阵 M 对角化，那么，从确定特征值 $\lambda_1\lambda_2\cdots$，等着手，获得这些特征值的一般方法是解所谓的矩阵"特征方程"：

$$\det(\lambda I - M) = 0$$

不过，在 2×2 阶幺模矩阵的情况下，采用第一条原理来求解更为有益。假定矩阵 $M=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}$，则需从矩阵 $M=F\Lambda F^{-1}$ 中求出两个对角矩阵 F 和 Λ，因而 $MF=F\Lambda$。以后面的方程 $MF=F\Lambda$ 作为出发点，将它重新完整地列出来，并求得下述必要条件：

$$MF=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_{11} & F_{12}\\ F_{21} & F_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F_{11} & F_{12}\\ F_{21} & F_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}$$

其中 $(AD-BC)=1$，因为 $\det(M)=1$。相乘后，得：

$$\begin{bmatrix}AF_{11}+BF_{21} & AF_{12}+BF_{22}\\ CF_{11}+DF_{21} & CF_{12}+DF_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F_{11}\lambda_1 & F_{12}\lambda_2\\ F_{21}\lambda_1 & F_{22}\lambda_2\end{bmatrix}$$

因为要求这些矩阵相等，所以可以写出四个独立的方程；其中，每一个方程都将左边的矩阵元与相对应的右边的矩阵元分别联系了起来：

$$AF_{11}+BF_{21}=F_{11}\lambda_1 \tag{1.1}$$

$$CF_{11}+DF_{21}=F_{21}\lambda_1 \tag{1.2}$$

$$AF_{12}+BF_{22}=F_{12}\lambda_2 \tag{1.3}$$

$$CF_{12}+DF_{22}=F_{22}\lambda_2 \tag{1.4}$$

若用 F_{21} 去除方程(1.1)和(1.2)，就可消去比率 (F_{11}/F_{21}) 并得到：

$$(F_{11}/F_{21})=B/(\lambda_1-A)=(\lambda_1-D)/C$$

因而

$$(\lambda_1-A)(\lambda_1-D)=BC$$

同样地，如果用 F_{22} 去除方程 (1.3) 和 (1.4)，便可消去比率 (F_{12}/F_{22}) 并得到：

$$(F_{12}/F_{22})=B/(\lambda_2-A)=(\lambda_2-D)/C$$

因而

$$(\lambda_2-A)(\lambda_2-D)=BC$$

换句话说，λ_1 和 λ_2 都满足同一个方程

$$(\lambda - A)(\lambda - B) - BC = 0 \tag{1.5}$$

尽管这个行列式不十分严密，但仍然容易看出，所得方程等效于上述引证的特征方程。于是有

$$\det(\lambda I - M) = \begin{vmatrix} (\lambda - A) & -B \\ -C & (\lambda - D) \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - A) \times (\lambda - D) - BC = 0$$

因已知 $\det(M) = (AD - BC) = 1$，故一个含有 λ 两个值的特征方程可简化为：

$$\lambda^2 - (A + D)\lambda + 1 = 0 \tag{1.6}$$

立刻可以看出，这两个解 λ_1，λ_2 必须满足

$$(\lambda_1 + \lambda_2) = (A + D) \quad 和 \quad \lambda_1\lambda_2 = 1。$$

解二次方程，得

$$\lambda = 1/2[(A + D) \pm \sqrt{(A + D)^2 - 4}] \tag{1.7}$$

（式中，λ_1 取正号，λ_2 取负号。）

主对角元素之和 $(A + D)$ 有时称为矩阵的"迹"或"径迹"。如果迹 $(A + D)$ 的值介于 2 和 -2 之间，那么，这两个特征值便都可以方便地重新写成含有角度 θ 的数项，将 θ 选在 0 和 π 之间，并且使 $(A + D) = 2\cos\theta$。于是，求得

$$\lambda_1 = \cos\theta + i\sin\theta = \exp(i\theta)$$

$$\lambda_2 = \cos\theta - i\sin\theta = \exp(-i\theta)$$

式中，exp 表示指数函数，i 表示 $\sqrt{-1}$。

反之，若 $(A + D)$ 大于 2 或小于 -2，则可选取一正数 t，使 $(A + D) = 2\cos ht$。（若 $(A + D)$ 是负数，则 $(A + D) = -2\cos ht$。）因此，两个特征值分别为

$$\lambda_1 = \exp(t) \quad （若 (A + D) 是正数，则为 -\exp(t)）$$

$$\lambda_2 = \exp(-t) \quad （若 (A + D) 是负数，则为 -\exp(-t)）$$

1.12.1

为了完成矩阵对角化过程，现在必须确定对角矩阵 F 及其逆阵 F^{-1}。不过，应当注意，前面已经确定了比率：

$$(F_{11}/F_{21})=(\lambda_1-D)/C=B/(\lambda_1-A) \tag{1.8}$$

以及

$$(F_{12}/F_{22})=(\lambda_2-D)/C=B/(\lambda_2-A) \tag{1.9}$$

实际上，上述两式除了一个纯量相乘因子之外，还具有两个重要的比率，它们确定了两个特征矢量的性质，

$$F_1=\begin{bmatrix}F_{11}\\F_{21}\end{bmatrix} \quad 和 \quad F_2=\begin{bmatrix}F_{12}\\F_{22}\end{bmatrix}$$

若任意地选择，使 F_{21} 和 F_{22} 两者都取 C 值，则得到 F 矩阵

$$F=\begin{bmatrix}F_{11} & F_{12}\\F_{21} & F_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\lambda_1-D) & (\lambda_2-D)\\C & C\end{bmatrix}$$

其行列式是

$$\det(F)=(F_{11}F_{22})-(F_{12}F_{21})=C(\lambda_1-\lambda_2)$$

如果说，以前要使对角矩阵 F 转换成一个幺模矩阵，必须用 $\sqrt{C(\lambda_1-\lambda_2)}$ 去除 F 的每个元素，那么，现在就不必要了。F 的逆阵则是

$$F^{-1}=(\mathrm{adj}\,F)^T/\det(F),$$

这显然是由纯量 $C(\lambda_1-\lambda_2)$ 除 $\begin{bmatrix}C & (D-\lambda_2)\\-C & (\lambda_1-D)\end{bmatrix}$所得。

于是，已经求得的完整的对角变换是

$$\begin{bmatrix}A & B\\C & D\end{bmatrix}=\frac{\begin{bmatrix}(\lambda_1-D) & (\lambda_2-D)\\C & C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\0 & \lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C & (D-\lambda_2)\\-C & (\lambda_1-D)\end{bmatrix}}{C(\lambda_1-\lambda_2)} \tag{1.10}$$

其中$(AD-BC)=1$，λ_1和λ_2满足$\lambda_1\lambda_2=1$和$(\lambda_1+\lambda_2)=(A+D)$两个条件。

1.12.2

学生应该自己验算，即将上面给出的三重乘积化简，使之满足这些结果。应当指出，如果原始矩阵中的元素C为零，那就必须根据另外一些表达式$B/(\lambda_1-A)$和$B/(\lambda_2-A)$来求这两个特征矢量的比率。于是，得

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\frac{\begin{bmatrix} B & B \\ (\lambda_1-A) & (\lambda_2-A) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (\lambda_2-A) & -B \\ (A-\lambda_1) & B \end{bmatrix}}{-B(\lambda_1-\lambda_2)} \tag{1.11}$$

（显然，若C和D都为零，则矩阵M已是对角化的了！）

第二章　近轴光学矩阵法

2.1 引　　言

本章将考虑如何用矩阵来描述合轴透镜系统的几何成像问题。这种合轴系统有一连串的球形折射表面，并且都会合在同一条光轴上。只有在假设两个主要近似的范围内，所得结果才是正确的。

第一个近似是几何光学的最基本假设，即光的波长小到可以忽略不计，并且不是用波面而是用若干条独立的光线来描述光的传播。(第三章里将用波面来描述高斯光束的传输问题，高斯光束传输的性质与单根光线最为接近。)用惠更斯作图法能够证明，如果允许光波没有碰到任何障碍物而一直行进，则它们将沿着与其波面相垂直的方向传播。几何光线的概念便是这些波面法线的一种理想化；在矢量表述中，可以将它看作是电磁场的坡印廷矢量(Poyting Vector)，或者是描述波面扰动相位的标量函数梯度(程函)。其结果是每条光线都服从最短时间的费马原理(Fermat's Principle)；如果要考虑在规定的入射点和出射点之间的光路上有否任何捷径，那么根据费马原理，光线将选择取时间为极小值的路径传播。

第二个近似是我们只考虑近轴光线——近轴光线靠近光轴，并且几乎与光轴平行，因此，对涉及到的任何角度的正弦或正切，都可以采用一级近似。因而，处理结果将不会给出有关三级效应的数据，例如球差或倾斜的彗差，像散，像场弯曲及其畸变等。但是，将涉及到某些纵向和横向色差问题。

人们经常将近轴成像光学称为高斯光学，因为在1840年，C·F·高斯(Gauss)奠定了这门学科的基石。在他的经典传记(Dioptrische Untersuchungen)中，高斯指出，任何一个透镜系统，其特性都可以由它的六个基点来确定，即两个焦点，单位角放大率的两个节点以及单位线放大率的两个主点。高斯论文中的奥妙在于，可用实验方法来确定这些点的位置，并根据透镜系统的表面曲率，间隔和折射率，用迭代法算出这些点的位置。在列出后面的公式时，高斯明确地列出了两个线性联立方程组，从而使一条出射光线的离轴高度及其与光轴的夹角，和入射光线相对应的量都一一联系了起来。但是，当时还不知道矩阵形式，而且高斯满足于他从欧拉(Euler)那里学来的代数法，采用了方便的计算式来表示这两个方程组的四个系数。(他采用的表达式，是一种连分数的速记形式，现在称为"高斯括弧"；这些表达式一点也不陈旧，因为它与近代"ynu"方法所用的计算几乎同样省时、方便。)

本章将说明，矩阵为进行这类计算提供了另一种方法。据说，大约在60年前，桑普森(Sampson)首先在光学中使用矩阵，不过，直到近期它才得到广泛采用。有关矩阵方法的第一批资料是E·L·奥尼尔(E·L·O' Neill)的**统计光学导论**(Addison-Wesley, Reading, Mass., 1963)，以及W·布劳韦尔(W·Brouwer)的**光学仪器设计中的矩阵法**(W. A. Benjamin Inc, New York, 1964)。两年后，哈尔巴赫(Halbach)和理查兹(Richards)曾在美国物理学杂志(American Journal of Physics)上分别发表文章，讨论了矩阵方法，不过，其中的分歧已经超出了本书计算所需要的范畴。

1965年期间，戈盖尔尼克(Kogelnik)发表了关于矩阵方法的一个重要引伸，从而使光线转移矩阵不仅可以用来描述近轴

光线的几何光学，而且也能用来描述达到衍射极限的激光光束的传输。我们将把有关光束和谐振腔的讨论推迟到下一章，不过，戈蓋尔尼克的工作已经具有如此完美无缺的文献资料，因而在我们所有的矩阵计算中，将首先采用他的计算方法，然后再采用辛克莱(Sinclair)更近期的计算方法。

2.2 光线转移矩阵

现在来考虑一条近轴光线通过一个合轴透镜系统的传播问题。根据目前通用的习惯，我们使用笛卡儿(Cartesian)坐标系统，从左到右的这些点的连线 Oz 代表了系统的光轴，同时也代表这些光线传播的总方向。在横轴中，取 Oy 为图平面内的向上方向，而假设 Ox 与图相垂直且方向离开读者。本章不考虑不交轴的光线，所以，我们的讨论可以只限于那些处在 yz 平面内靠近 Oz 轴的光线。

当一条光线通过光学系统的各种折射表面时，其轨迹将由一系列的直线组成，其中每条直线都可以由(a)直线上的一个点的坐标以及(b)直线与 z 轴的夹角来详细描述。如果预先选择任意一个与 z 轴相垂直的平面(例如 z 为常数的一个平面)，我们称之为参考平面(RP)。于是，在任何一个特定的参考平面的情况下，可以用一条光线与该参考平面相交时所对应的高度 y，以及这条光线与 z 轴的夹角 v 来表示这条光线；角 v 以弧度为单位，并且，若以 z 轴的正方向为轴线作逆时针旋转而到达光线传播的方向，则规定它们之间的夹角 v 为正数(见图2.1)。

虽然能够将计算中遇到的所有的光线都归结到单个参考平面内(例如 $z=0$ 的参考平面)，但是在实际上，对初始计算的每一个阶段来说，选择一个新的参考平面却要方便得多。这意味

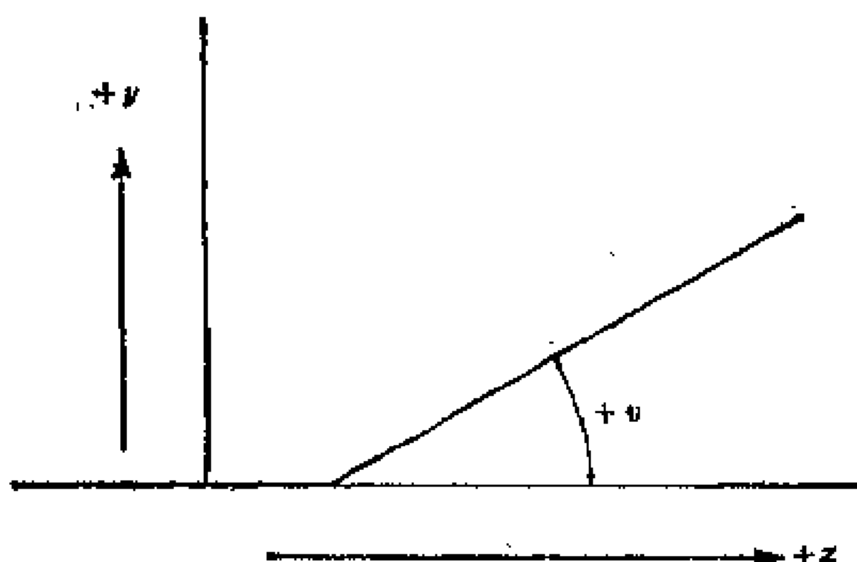


图 2·1

着，在考虑光学系统的各个部件时，光线的数据便从一个参考平面 RP 上连续地转移到下一个参考平面上。不过，一旦顺利完成对整个系统的初步计算以后，就可以设想出一个完整的光线转移矩阵，这个矩阵将会把希望考虑的所有光线数据从选定的输入参考平面上直接转移到选定的输出参考平面上。

我们曾经指出过，在任意一个参考平面 RP 上，根据光线高 y 及其夹角 v，便可以详细表示这条光线。不过，倘若采用相对应的"光学方向余弦" nv（严格地讲应该是 $n\sin v$）来代替夹角 v，其中 n 是光所通过的介质的折射率，则计算将更加方便。将光学方向余弦记作 V，它服从斯涅耳定律(Snell's law)，当光通过两种不同介质之间的分界面时，V 仍然保持不变。（虽然采用光学方向余弦 $V=nv$ 似乎比较复杂，但是在大部份计算中，初始和最后的参考平面都置于空气中，所以 V 与 v 两者差别很小；而且可以大大简化平行平板的计算，并保证所有涉及到的矩

阵都是幺模矩阵。)*

在一条光线通过一个透镜系统时，为了确定其传输过程，只需要考虑两个基本过程：

(a) 平移，或称透镜的两个折射面之间的间隔。光线越过间隔时，只是在其路径上以直线方向传播到下一个折射表面。在列举一个间隔时，必须知道间隔的厚度 t 以及光线所通过的介质的折射率 n。

(b) 折射，即在折射率不同的两个区域之间的分界面上的折射。为了确定光线受到多大的偏折，必须知道该折射表面的曲率半径以及分界面两侧各自的折射率值。

下面两节将研究这两个基本过程的每一个对光线的 y 值和 V 值的影响。这条光线首先通过一个具有 y_1 值和 V_1 值的参考平面 RP_1，接着通过平移或折射过程，再通过另一个具有 y_2 值和 V_2 值的参考平面 RP_2。根据 y_1 值和 V_1 值，以及两个参考平面之间的平移或折射过程的特性，就可以求得给出一个 y_2 值和 V_2值的方程组。

因为对于上述两个过程，其方程组都是线性的，所以可以写成下述矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ V_1 \end{bmatrix}$$

这些矩阵元素正是$(AD-BC)$等于 1 的行列式。

另外，若需求出反向光线的轨迹，则可将矩阵方程逆转，于

* 译注：光学方向余弦 V 即为前面提到的 ynv 方法中的 nv。$V=n\cos(90°-V)=n\sin v$。由于这里只考虑近轴光线，夹角 v 一般很小，所以 $V=n\sin v\doteq nv$，式中的 v 必须以弧度而不是度为计算单位。又因为在实际使用中，一般都将透镜置于空气中，其 $n_{空气}=1.00028\doteq1$，所以这时 $V\doteq nv\doteq v$。原著为叙述、图解方便，在以后的各个章节和插图中一般不再称光学方向余弦 V，而称夹角 V，很少称夹角 v。请读者注意。

是得到

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ V_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & -B \\ -C & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

业已证实，一个光学系统的每个部件都可以用一个幺模形式的光线转移矩阵表示。将所有基本的平移和折射矩阵以正确的次序一起相乘，便得到了表示整个部件的单根光线矩阵；从单个薄透镜到复杂的光学系统，都可以这样做。

2.3 平移矩阵 $\mathscr{T}$

图 2.2a 和 2.2b 示意了一条光线通过两个参考平面之间的距离 t 到达右侧的两个例子。显然，在整个平移过程中，光线传播的夹角保持不变，但它到光轴的距离则发生了变化。图 2.2a 说明了 y 和 v 仍然都是正数的情况，图 2.2b 说明了其中的 v 是负数的情况。为了清楚起见，将两个图中的夹角 v 都夸大了——实际上，一条近轴光线的最大的 v 值应该小于 0.1 弧度（即 6° 左右）。所以，近轴近似造成的误差仍然小于 1%。

参考图 2.2a

$$\begin{aligned} y_2 &= RP = RQ + QP = TS + SQ \tan \widehat{PSQ} \\ &= y_1 + t \tan(v_1) = y_1 + t v_1 \end{aligned}$$

参考图 2.2b

$$\begin{aligned} y_2 &= RP = RQ - PQ = TS - SQ \tan \widehat{PSQ} \\ &= y_1 - t \tan(-v_1) = y_1 + t v_1 \end{aligned}$$

（这儿已经使用了近轴近似，可以用 (v) 代替 $\tan(v)$ 或 $\sin(v)$，其误差可忽略不计。）前面已经指出过，将要运算的平移矩阵所依赖的光线参数是光线高 y 及其方向余弦即 V 值，而不是它的夹角 v。因而，若 n 是 RP_1 和 RP_2 之间的介质的折射率，则上述方程必须重新写成

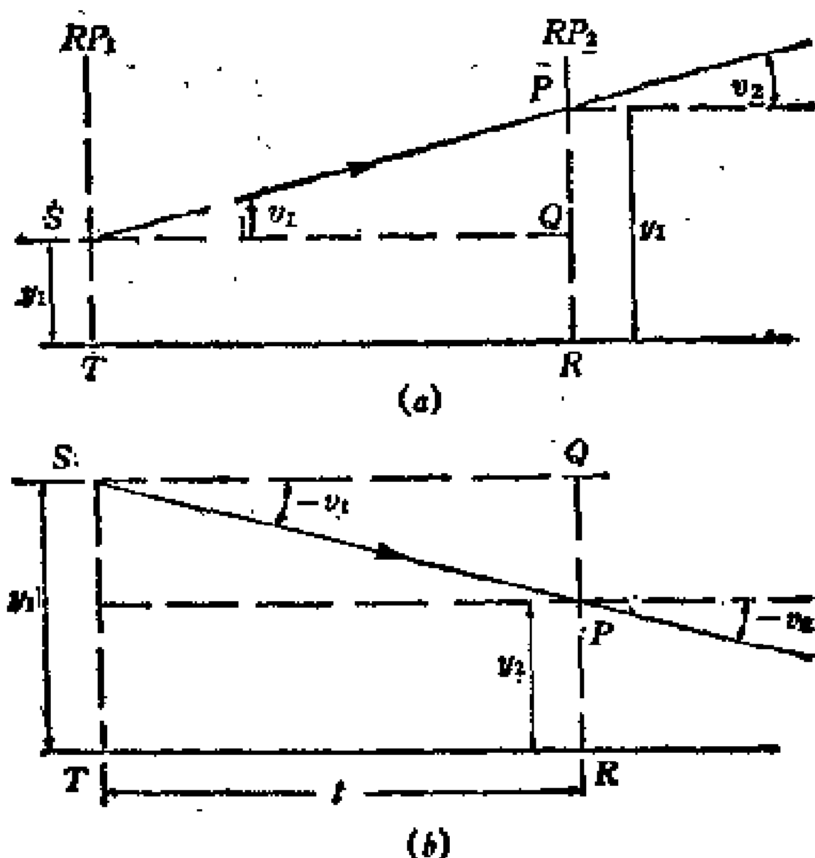


图 2·2

$$y_2 = y_1 + (t/n)(nv_1) = 1y_1 + TV_1$$

其中，$T=(t/n)$是表示两个参考平面之间间隔的“约化厚度”。从上面两个图中可以立即看出，v_1 和 v_2 相等，于是，新的方向余弦 V_2 的方程可以写成

$$V_2 = nv_2 = nv_1 = 0\,y_1 + 1\,V_1$$

已得到的这对方程组现在可以重新写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ V_1 \end{bmatrix}$$

因而，一个表示向右平移并通过一段约化距离 T 的矩阵是

$$\mathscr{T} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其行列式 $\det(\mathscr{T})$ 显然等于 1。

2.3.1 复合层和平行平板

值得指出的是，如果任意地设想，将一个间隔 t 分成两个相邻的间隔 t_1 和 t_2，t_1 和 t_2 仍有同样的折射率 n，就可以得到两个逐次的平移矩阵

$$\mathscr{T}_1=\begin{bmatrix}1 & T_1\\0 & 1\end{bmatrix} \quad \text{和} \quad \mathscr{T}_2=\begin{bmatrix}1 & T_2\\0 & 1\end{bmatrix}$$

其中 $T_1=(t_1/n)$，$T_2=(t_2/n)$ 和 $t_1+t_2=t$。

若用 $\mathscr{T}_2$ 左乘或右乘 $\mathscr{T}_1$，则得

$$\mathscr{T}_2\mathscr{T}_1=\mathscr{T}_1\mathscr{T}_2=\begin{bmatrix}1 & (T_1+T_2)\\0 & 1\end{bmatrix}=\mathscr{T}$$

结果同前(因为 $T_1+T_2=T$)。

类似的情况也适用于含有几个分层、其总厚度为 t 的间隔，每一个第 i 层都有它自己的厚度 t_i 及其折射率 n_i。假定所有的分界面都是平面并与光轴相垂直，那么，在每个分界面上的光线高及其方向余弦都仍然保持不变。因此，不必为任何折射矩阵担扰，因为每一个折射矩阵都只是一个单位矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$，而且可以忽略。(这将在下一节证明。)

现在可以看到，假定每一个第 i 层均由其约化厚度 $T_i=(t_i/n_i)$ 表示，那么，便可将各个平移矩阵一起相乘，从而得出单个表示整个间隔作用的矩阵。如同我们已经看到的那样，这些平移矩阵都具有明显的特性：它们一起相乘的顺序无关紧要，出现在积矩阵中的 T 值正好等于各个矩阵中 T 值的和：

$$\begin{bmatrix}1 & T_1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & T_2\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & T_3\\0 & 1\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}1 & T_n\\0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & \sum_i T_i\\0 & 1\end{bmatrix}$$

可以看出，无论这些平移矩阵的阶取多少，都可以产生同样的乘积，现在来考虑与这种情况相对应的光学系统。如果有人透过一整列的平行平板垂直地看去时，那么，移动平板或者甚至将它们互换，都可能影响反射光的亮度，但是，透射像的几何图形却仍然严格保持不变。

（当我们说，一块折射率为 n，厚度为 t 的玻璃平行平板具有约化厚度(t/n)时，我们是在利用完全近似的术语。如果有人在看一个处在离平板较远的一方的物体时，则到达他视线的光所行经的路程实际上要比没有平板时的长，但是，这个物体看上去确实靠得较近。将同样厚度的玻璃板取代空气层，则物体更靠近观察者，所差的距离为$(t/1)-(t_n)=t(n-1)/n$，这一数值约为该平板厚度的1/3。对浸没在水中的物体，其因子$(n-1)/n$大约等于0.25，但深度 t 也许是相当大的——即使是熊用爪子捞鱼，也需要知道大概的约化厚度！）

2.4 折射矩阵 $\mathscr{R}$

现在来研究一个两侧折射率分别为 n_1 和 n_2 的曲面的情况，若曲率中心位于曲面右侧，则曲面的曲率半径取正值。图2.3所示的情况说明了一个正曲率的曲面，曲面右侧的折射率 n_2 大于左侧的折射率 n_1。图中示意的光线也是这样，曲面的两侧都具有正的 y 值和 V 值。

和图2.2一样，图2.3示意的角度都已大大地夸张了，其结果是，通过表面顶点画出来的 RP_1，与通过光线入射点到表面画出来的 RP_2 似乎分隔得很开。但是，对近轴光线来说，这两个平面之间的间隔将是 $r(1-\cos\alpha)$，而且因为象 v_1 和 v_2 一样，假设 α 是一个小角度，所以 α 的正弦可以忽略。从而 $y_2=y_1$。

在图解中应用斯涅耳定律，得

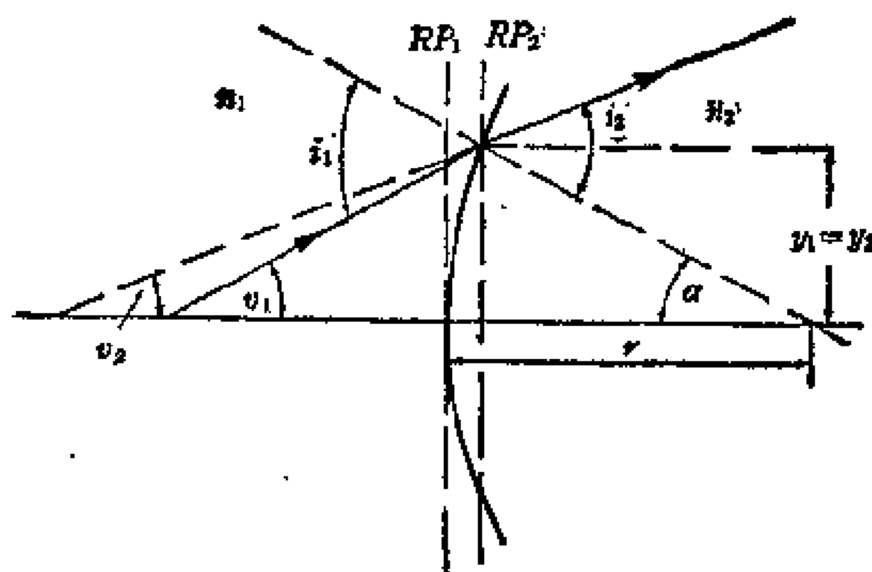


图 2·3

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 \quad 或者 \quad n_1 i_1 = n_2 i_2$$

必须加以近轴近似。不过，由于外角定理

$$i_1 = v_1 + \alpha = v_1 + y_1/r \quad 和 \quad i_2 = v_2 + \alpha = v_2 + y_1/r$$

因而
$$n_1(v_1 + y_1/r) = n_2(v_2 + y_1/r)$$

或者
$$V_1 + n_1 y_1/r = V_2 + n_2 y_1/r$$

所以，用矩阵形式重新安排方程组，最后得

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -(n_2 - n_1)/r & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ V_1 \end{bmatrix}$$

量$(n_2 - n_1)/r$ 通常称为曲面的折射本领。

考虑一种所有的量都是正值的特殊情况，可以得到折射矩阵

$$\mathscr{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -(n_2 - n_1)/r & 1 \end{bmatrix}$$

但是，如果进行充分的分析，亦即研究改变折射率，或者改变曲率符号，或者 y 或 V 为负值等其他情况，将会发现，同一个折射矩阵 $\mathscr{R}$，即使改变光线的方向，也会给出完全一致的结果。

我们把含有反射表面的重要内容推迟到章末。就折射表面而言，如果光线遇上一个 r 是无穷大的分界平面，则该表面所贡献的折射本领 $(n_2-n_1)/r$ 为零，折射矩阵就简并成一个单位矩阵这样平凡的的矩阵。上一节在考虑串接几个平行平板的平移矩阵时，我们已经使用了这样的单位矩阵。

2.4.1 薄透镜近似

当几个折射表面相互靠近，以致于夹在中间的间隔可以忽略时，就有可能将几个折射矩阵同样串在一起。（在这种情况下，简并成一个单位矩阵的正是这个平移矩阵。）如果第 i 个折射表面具有曲率 r_i 以及折射率 n_i 和 n_{i+1}，那就能用 $P_i=(n_{i+1}-n_i)/r_i$ 表示它的折射本领，几个薄透镜组合后的串接矩阵将是 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\sum\limits_i P_i & 1 \end{bmatrix}$，而且与各个薄透镜的折射本领相加的顺序无关。

读者应该自己验证：

$$\mathscr{R}_2\mathscr{R}_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ P_2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P_1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -(P_1+P_2) & 1 \end{bmatrix}=\mathscr{R}_1\mathscr{R}_2$$

例如，单个薄透镜，无论用哪一种方法安置，其折射矩阵都是一样的。其折射本领是

$$P=P_1+P_2=(n-1)/r_1+(1-n)/r_2$$

$$=(n-1)(1/r_1-1/r_2)=1/f$$

通常，折射本领 P 的量度以屈光度为单位，焦距 f 以及曲率半径 r_1 和 r_2 都以米为单位。

一般来说，如果要对一系列焦距已给定的薄透镜进行计算，那么，利用相应的折射本领或者光焦度 $P_i=1/f_i$ 来代替每个焦

距 f_i 则更加方便。*于是，第 i 个透镜的折射矩阵是

$$\mathscr{R}_i=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -P_i & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1/f_i & 1\end{bmatrix}$$

如上所见，这是一个一连串的 $\mathscr{R}$ 矩阵或者一连串的 $\mathscr{T}$ 矩阵相互串接成单个矩阵的简单问题。但是，在一般情况下，将遇到一种 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{T}$ 矩阵两者相交替的连接方式，因此，必须仔细考虑矩阵中出现的顺序。对任何一种折射——平移乘积矩阵，矩阵相乘是非交换的。例如

$$\mathscr{R}\mathscr{T}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -P & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & T\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & T\\ -P & (1-PT)\end{bmatrix}$$

反之，$$\mathscr{T}\mathscr{R}=\begin{bmatrix}1 & T\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -P & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(1-PT) & T\\ -P & 1\end{bmatrix}$$

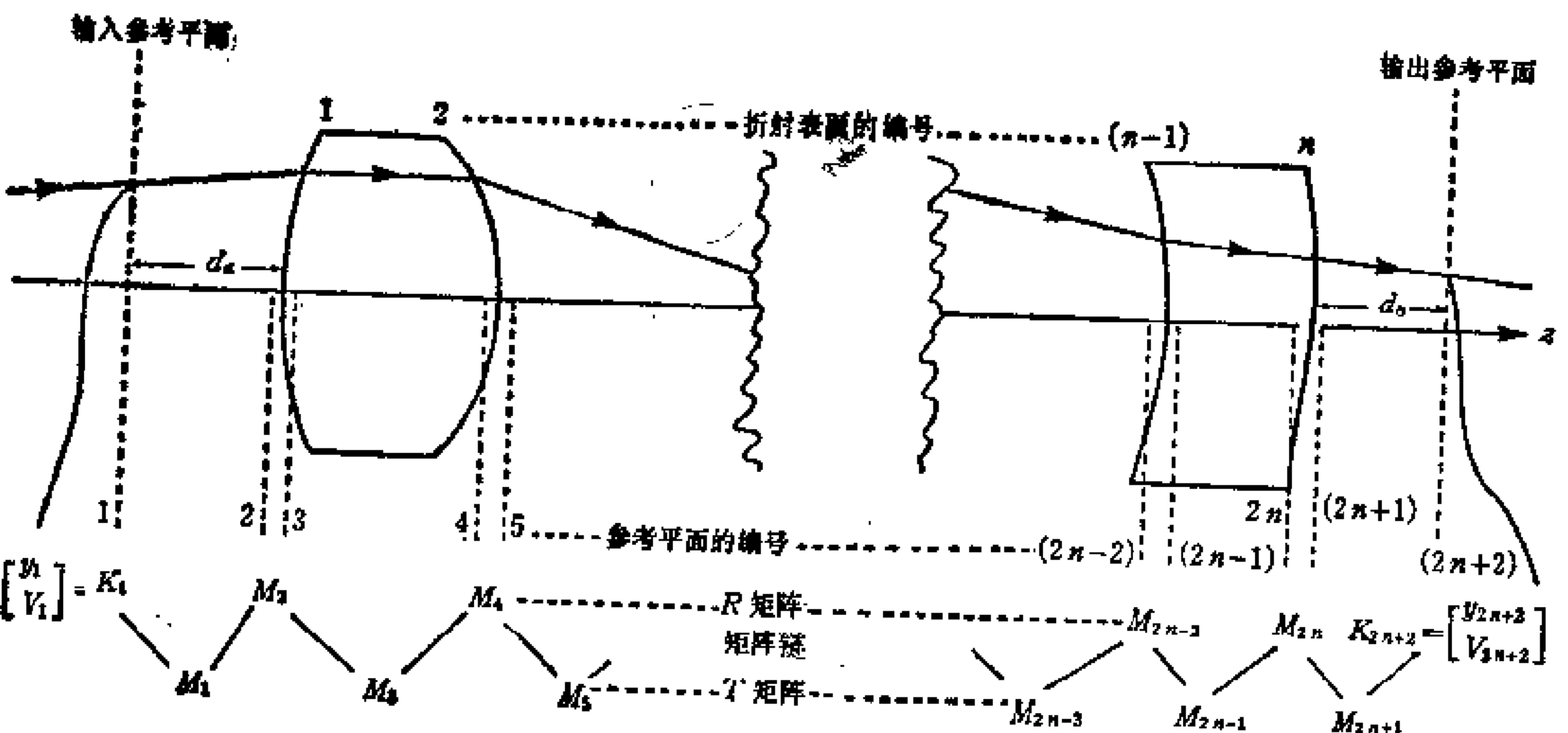
后面的矩阵与前面的矩阵有区别，因为两个主对角元素已经互换了。

2.5 光学系统的光线转移矩阵

2.5.1 参考平面的编号

有一个含有 n 个折射表面，并分成 $(n-1)$ 个间隔的光学系统，现在来考虑一条近轴光线通过该系统的传播问题。如果仅仅因为每个透镜往往被包在一个盒子或管子里，那么，比较方便的办法是把第一个“输入”参考平面 RP_1 选择在离第一个折射表面的左边一段距离 d_0 处。于是 RP_2 和 RP_3 紧接着第一个折射表面的左边和右边；RP_4 和 RP_5 将位于第二个折射表面的两

* 译注：光焦度、折射本领以及第三章以后提到的会聚本领都是同一个物理量，它表示光学系统对光线的光聚或发散能力，在光学术语中均称光焦度。原著为数学上叙述方便，常将单个折射球面的光焦度称为折射本领，有时也将会聚的薄透镜的光焦度称为会聚本领。



$K_{2n+2}=(M_{2n+1}M_{2n}M_{2n-1}\cdots\cdots M_3M_2M_1)K_1=MK_1$ 其中 $M=(M_{2n+1}M_{2n}M_{2n-1}\cdots\cdots M_3M_2M_1)$

取递减次序的矩阵链乘积

图 2·4

边，如此等等，直到达到第 RP_{2n} 和 RP_{2n+1} 参考平面位于第 n 个折射表面的两边。因此，最后的"输出"参考平面 RP_{2n+2} 应当取在距最后的折射表面的右边为 d_b 的地方。现在设法寻求一个总的光线转移矩阵 M，它能将一个输入光线矢量 $\begin{bmatrix} y_1 \\ V_1 \end{bmatrix}$ 直接转换成一个输出光线矢量 $\begin{bmatrix} y_{2n+2} \\ V_{2n+2} \end{bmatrix}$（见图 2.4）。

2.5.2 矩阵的编号

下一步是列出表示各个参考平面之间的每一个部件的平移或折射矩阵。再从图解的左端到右端，对这些矩阵 $M_1M_2M_3M_4\cdots M_{2n+1}$ 一一编号，其规则是：表示每一个矩阵的数码与它自己左边的参考平面的数码相同。对于一条通过第 r 个参考平面的光线，如果使用记号 K_r 来表示光线矢量 $\begin{bmatrix} y_r \\ V_r \end{bmatrix}$，那么，对于从 RP_r 到 RP_{r+1} 的光线数据，则具有基本的递推关系 $K_{r+1}=M_rK_r$，同理 $K_r=M_{r-1}K_{r-1}$ 等等。

2.5.3 由给定的输入光线计算将产生的输出光线

重复使用上述的递推关系以及矩阵相乘的结合律特性，于是得

$$
\begin{aligned}
K_{2n+2} &= M_{2n+1}K_{2n+1} = M_{2n+1}(M_{2n}K_{2n}) \\
&= (M_{2n+1}M_{2n})(M_{2n-1}K_{2n-1}) \\
&= (M_{2n+1}M_{2n}M_{2n-1}M_{2n-2}\cdots M_3M_2M_1)K_1
\end{aligned}
$$

因而 $K_{2n+2}=MK_1$，其中 M 表示一个完整的**取递减次序**的矩阵乘积。

$$M=(M_{2n+1}M_{2n}M_{2n-1}M_{2n-2}M_{2n-3}\cdots M_3M_2M_1)$$

这里要着重指出，已有足够事例证明，可以将编号的各个矩阵按反次序写成上述这些方程组。可以把上述的反次序假想为，

有一观察者从输出参考平面回头向着光源看时的情形；所以，按上述方式写方程也是一种自然顺序，即一旦决定从输出光线矢量开始往回计算，则所得出的一些矩阵可以看作是描述从输出参考平面回到输入参考平面时的一个数链中的一些链环。

2.5.4 为产生规定的输出光线，对输入光线进行计算

如果我们希望从第一批原则着手计算的话，那么，可以将每一个矩阵倒置，并使用倒置了的递推关系式 $K_r = M_r^{-1} K_{r+1}$。于是，得

$$K_1 = M_1^{-1} K_2 = M_1^{-1} M_2^{-1} K_3$$
$$= (M_1^{-1} M_2^{-1} M_3^{-1} M_4^{-1} \cdots M_{2n+1}^{-1}) K_{2n+2}$$

（在这种情况下，递升次序中出现了该数链的一些链环，不过，每一个链环都已倒置了。）

但是，通常的习惯是先计算出总矩阵 M，并且为了得到 $K_1 = M^{-1} K_{2n+2}$，可以直接将方程 $K_{2n+2} = M K_1$ 倒置。正如1.10节所述，因为一个矩阵乘积的倒数，和取反次序形式的各个逆矩阵的乘积相等，所以，这两个结果严格相同。

2.5.5 积矩阵 M 的形成

根据矩阵的结合律特性，可以有几种方法相乘来得到完整的矩阵乘积。但是，若涉及到三个以上的矩阵时，则一开始就使矩阵成对，可能会使书写省去许多麻烦：对每一个 $\mathscr{R}\mathscr{T}$ 乘积的矩阵，几乎一看就可以写出来，因为其中只有第四个矩阵元素 $(1-PT)$ 需要计算。当建立一长链的乘积矩阵时，最好时常能检查一下，看其行列式是否仍是 1——如果不是，那就肯定有错误，因为所有的 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{T}$ 矩阵本身都是幺模矩阵。

对一个完整的光学系统，一旦已求得其总矩阵 M，通常较方便的办法是不去管所有夹在中间的元素，而只需记住象 RP_2 那样的输出参考平面。（因为现在已经可以用单一计算步骤把光

线数据从 RP_1 转移到输出参考平面。）

不过，在某些情况下，光学系统的一半与另一半隔着一个可变的间隔，因此，最好是先分别计算这两个已知部分的矩阵，然后再用表示可变间隔的 $\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 矩阵，将这两个已经算出来的矩阵连接起来。于是，总矩阵的四个元素都是 t 的简单线性函数。

经常也会遇上一个复杂的透镜系统，它有可变的物距和像距。此时，应首先再一次计算出已知系统的居中部分（即透镜系统）的单个矩阵。

2.6 从光学系统的矩阵推导其特性

假设已经在数值上知道一个光学系统的总矩阵 M，那就能马上写出方程 $K_2=MK_1$ 的全部读数

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ V_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ V_1 \end{bmatrix}$$

其中 $(AD-BC)=1$。为了更好地理解 A, B, C 和 D 这四个量的含义，现在来考虑，若其中一个量为零时会发生怎样的情况。

(a) 若 $D=0$，则光学方向余弦 V_2 的方程为 $V_2=Cy_1+0V_1=Cy_1$。这意味着：所有的光线都从同一个点（用 y_1 表示）进入到输入平面，并且以与光轴成同一个方向 $V_2=Cy_1$ 在输出平面上出现，它与光线进入到系统的方向 V_1 毫无关系。由此推论，输出平面 RP_1 必须是该系统的第一焦平面（见图 2.5）。

(b) 若 $B=0$，则光线高 y_2 的方程 $y_2=Ay_1+0V_1=Ay_1$。这意味着：RP_1 上所有离开 O 点的光线（用 y_1 表示）都将通过 RP_2 上的同一个点 I（用 y_2 表示）。因此，O 点和 I 点分别是物点和像点，于是，RP_1 和 RP_2 现在是一对共轭平面。此外，$A=y_2/y_1$ 给出了在这种情况下系统所产生的放大率（见图 2.6）。

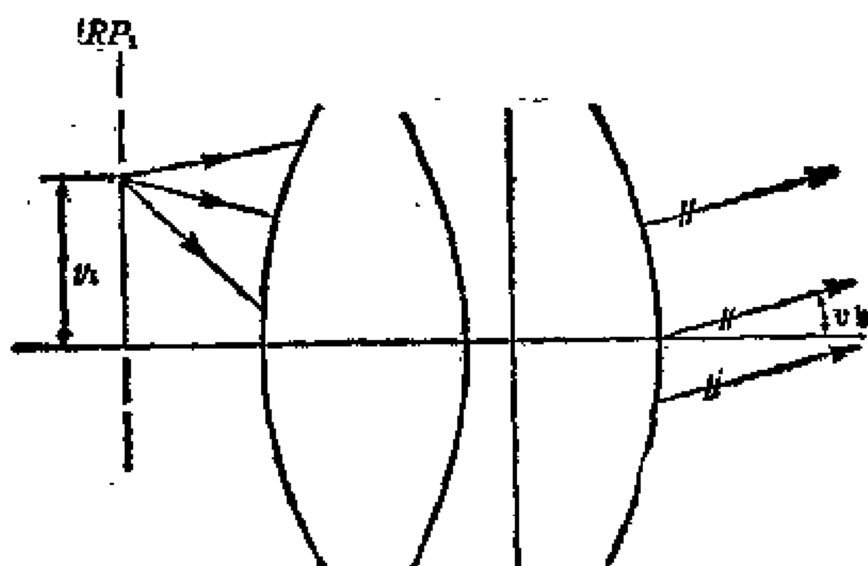


图 2·5

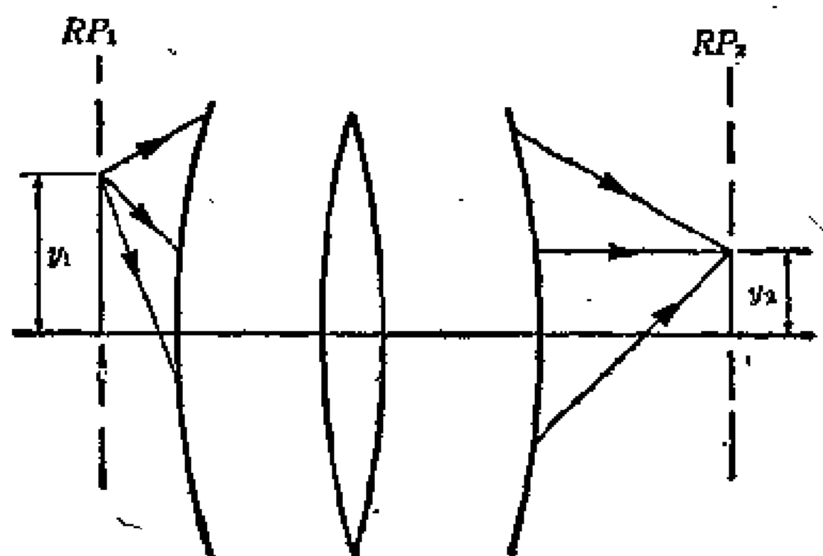


图 2·6

(c) 若 $C=0$，则 $V_2=DV_1$。这意味着，所有的相互平行地进入到系统的光线（V_1 给出了它们整个的方向），将以一个新的方向 V_2 相互平行地出射。将一束平行光束变换成另一束平行光束，只是方向改变，这样的透镜系统叫做无焦系统或望远镜系统。在这种情况下，$(n_1D/n_2)=(v_2/v_1)$是系统所产生的角放大率（见图 2.7）。

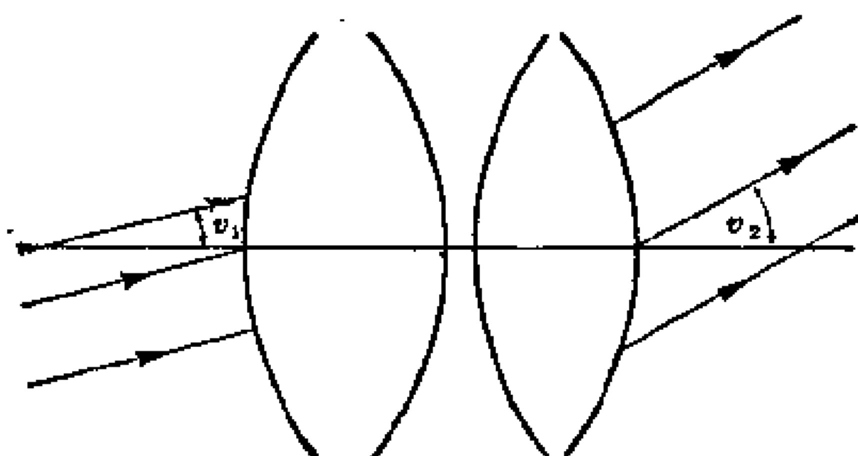


图 2·7

(d) 若 $A=0$，则光线高 y_2 的方程 $y_2=BV_1$。这意味着，所有的以同一个方向(用 V_1 表示)进入到系统的光线，都将通过输出平面 RP_2 中的同一点(由 y_2 表示)。因此，这个系统将平行光束成束地聚焦到 RP_2 上的各个点上。换言之，RP_2 是系统的**第二焦平面**(见图 2.8)。

(e) 请记住，在光线转移矩阵中，若 A 或者 D 为零，则方程 $(AD-BC)=1$ 于是要求 $BC=-1$。同理，若 B 或 C 为零，则 A 必须是 D 的倒数。

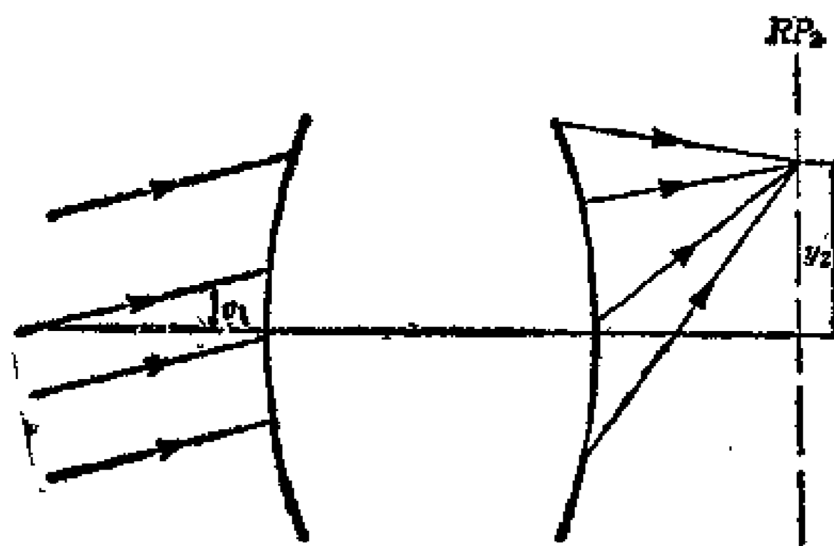


图 2·8

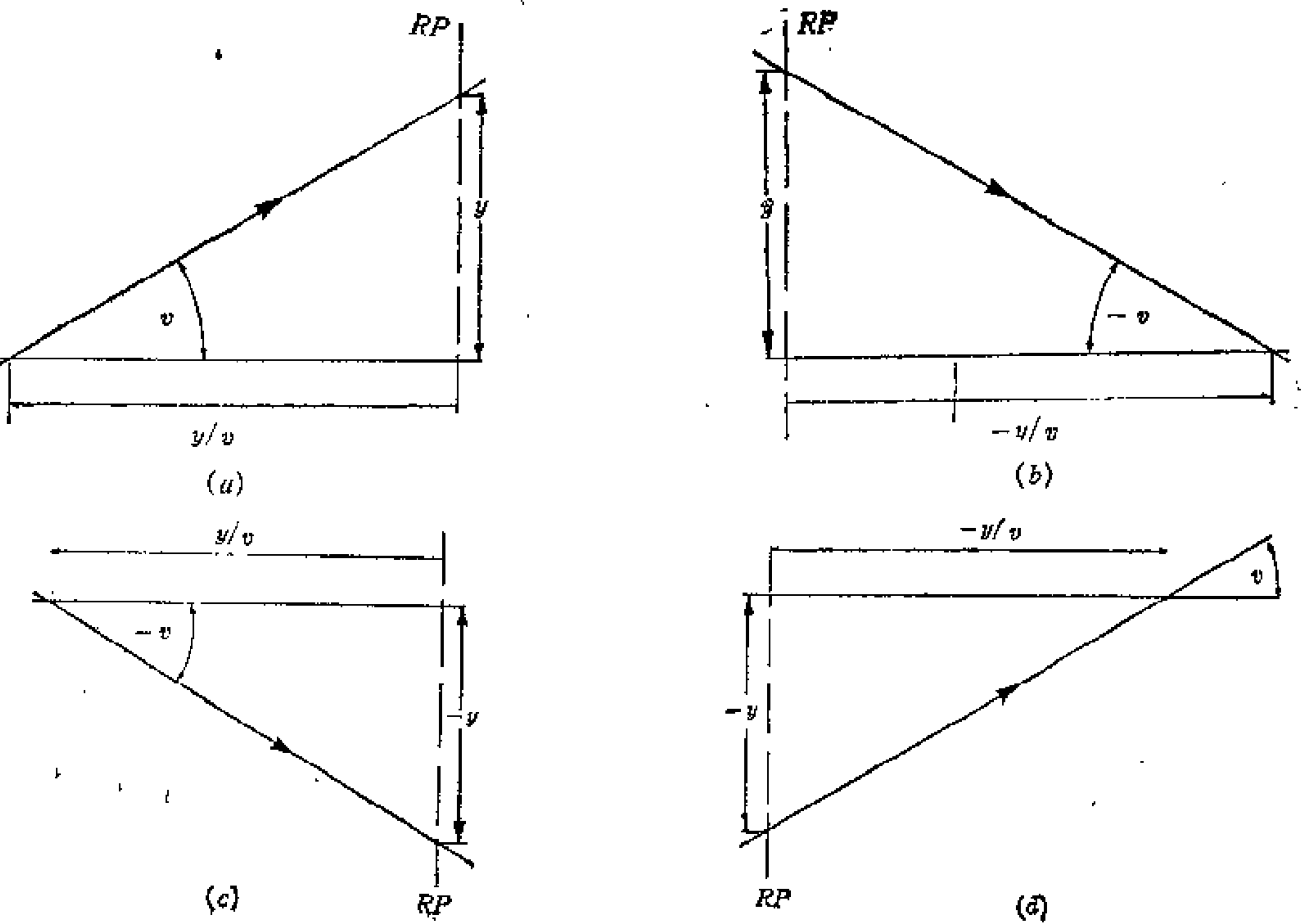


图 2·9

在一个光学系统中，当在第一和第二参考平面之间保持物——像关系时，则 B 为零，所以，A 或 $(1/D)$ 就是横向放大率，这就产生了一个寻求光学系统矩阵元素的实验方法，而不必拆开系统，也不必测量系统的各个部件。我们在用矩阵方法解决某些问题之后，再来描述这个方法。

一般来说，只要一条光线的 V 值不是零，该光线总会与光轴的某点相交。就一个给定的参考平面而言，光线高是 y 而夹角 v 等于 (V/n)，与光轴相交的 z 位置将是 $(-y/v)=(-ny/V)$。若 y 和 V 两者都是正数或者都是负数，则这个点将落在参考平面的左侧(见图 2.9)。

2.7 例　　题

例题 1　有一段折射率为 1.56 的长塑料棒，将其左端面研磨并抛光成一个半径为 2.8 cm 的凸球面(向外)。将一个 2 m 高的物体置于空气中，并位于光轴上且与顶点相距 15 cm 处。(见图 2.10)试求在棒内像的位置及其大小。

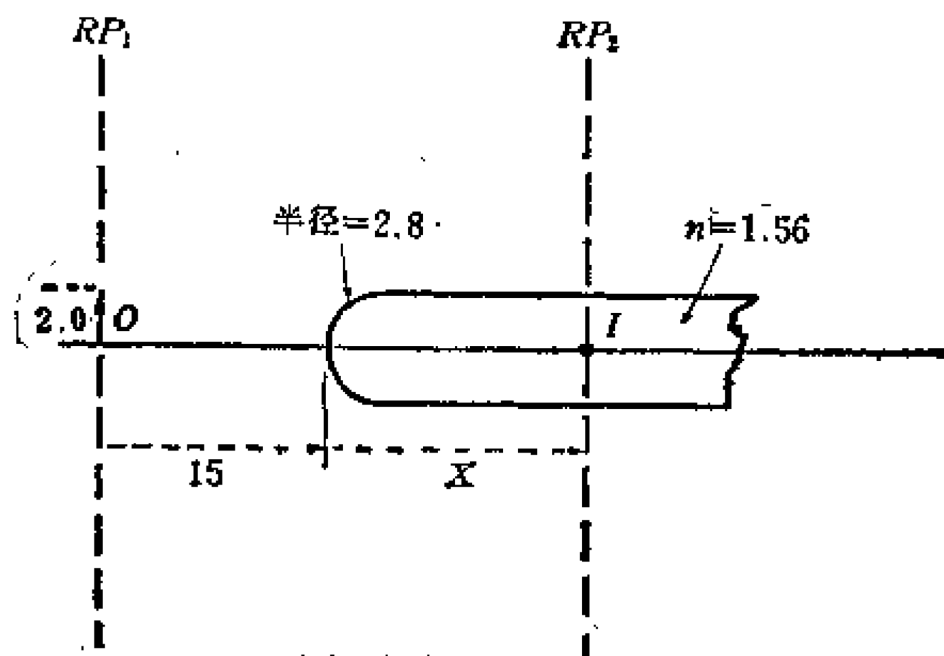


图 2.10

解：$\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{T}$ 矩阵都以厘米为长度单位，计算过程如下。曲面的 $\mathscr{R}$ 矩阵是

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -(n_2-n_1)/r & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (-1.56+1)/2.8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.2 & 1 \end{bmatrix}$$

若像与曲面的右侧相距 X 厘米，则从像回到物体的矩阵链是

$$M=\begin{bmatrix} 1 & X/n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0.2 & 1 \end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix} 1 & 15 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

（从像到曲面）（曲面折射）（从曲面到物体）

$$=\begin{bmatrix} 1 & X/1.56 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 15 \\ -0.2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} (1-x/7.8) & (15\quad X/0.78) \\ -0.2 & -2 \end{bmatrix}$$

验算：

$$\det(M)=(AD-BC)$$
$$=-2+(X/3.9)+3-(X/3.9)=1$$

为了保持物——像关系，右上角元素 B 必须为零：

$$15-\frac{X}{0.78}=0 \qquad \therefore \quad X=11.7$$

因面，像位于棒内 11.7 cm 处。像的横向放大率由 A 或 $1/D$ 给出，其值为 -0.5。所以，像高为(0.5×2)cm$=1$ cm，而且是一个倒像。

例题 2 有一段长为 2.8 cm，折射率为 1.6 的玻璃棒，将其两端均研磨成半径为 2.4 cm 的球面，两个凸面均朝外。将一个 2 m 高的物体置于空气中，并且放在棒的光轴上，与左顶点相距 8 cm。（见图 2.11）。求最后成像的位置和大小。

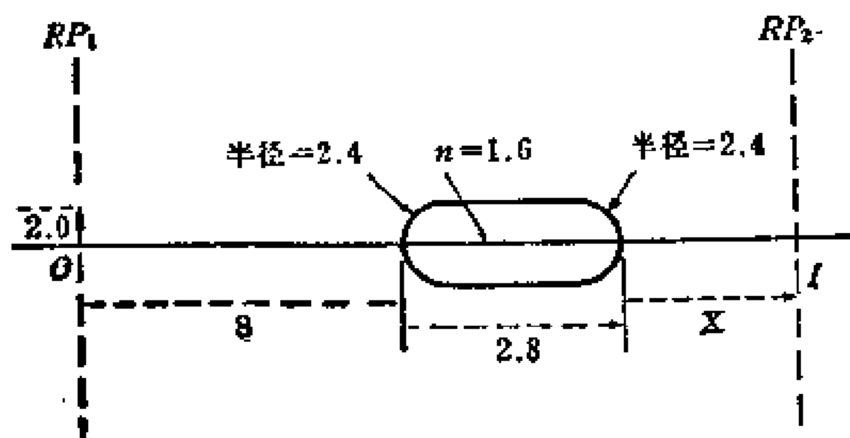


图 2·11

解： 若最后成的像与棒的右端相距 X cm，则矩阵链是

$$M=\begin{bmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ \dfrac{-(1-1.6)}{-2.4} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \dfrac{2.8}{1.6}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

(到棒的像)　　(棒的右端)　　(棒的长度)

$$\times\begin{bmatrix}1 & 0\\ \dfrac{-(1.6-1)}{2.4} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 8\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

(棒的左端)　　(棒到物体)

$$=\begin{bmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -0.25 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1.75\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\times\begin{bmatrix}1 & 0\\ -0.25 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 8\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 1.75\\ -0.25 & 0.5625\end{bmatrix}$$

$$\times\begin{bmatrix}1 & 8\\ -0.25 & -1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0.5625 & 6.25\\ -0.391 & -2.56\end{bmatrix}$$

所以，

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5625-0.391X & 6.25-2.56X \\ -0.391 & -2.56 \end{bmatrix}$$

为了保持物——像关系，必须有 $2.56X=6.25$。所以 $X=2.44$ cm(到棒的右端)，其横向放大率是 $1/D=-1/2.56=-0.39$。因而像为 $(2\times0.39)=0.78$ cm 高，并且是一个倒像。

例题 3 一束平行光入射到一个干净的塑料球珠上，球珠的直径为 2 cm，折射率为 1.4。(见图 2.12)。问光束将聚焦在球珠外的哪一个点上?

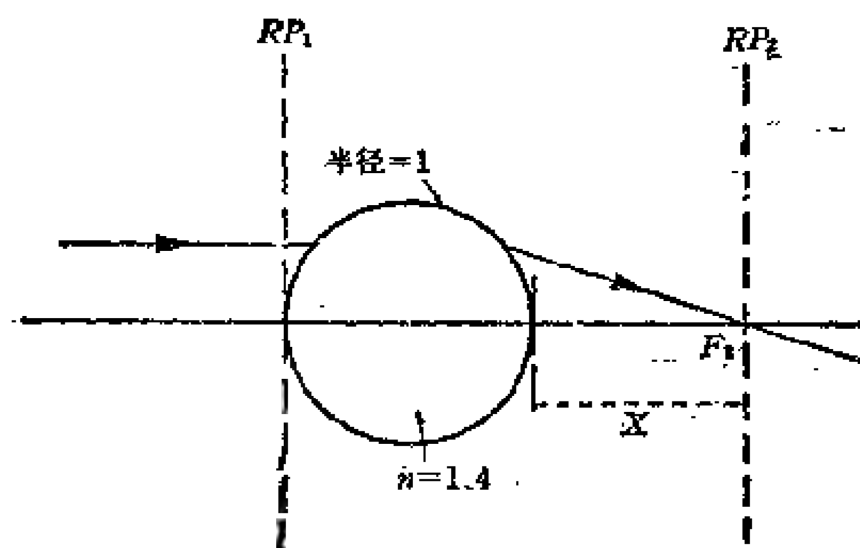


图 2·12

解：若选择一个输出参考平面 RP_2，它与球珠的右端相距 X cm，则矩阵链是

$$M=\begin{bmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-(1-1.4)}{-1} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{1.4} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(空气间隔)　(右球面)　(两个球面之间)

$$\times\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-(1.4-1)}{1} & 1 \end{bmatrix}$$

(左球面)

$$=\begin{bmatrix}1 & X\\0 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0.429 & 1.429\\-0.571 & 0.429\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.429-0.571X & 1.429+0.429X\\-0.571 & 0.429\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}A & B\\C & D\end{bmatrix}$$

平行光束聚焦到 RP_2 上的条件是，矩阵中的元素 A 应当是零：

$$0.571X=0.429 \qquad \therefore \quad X=0.75$$

另外，也可以从球珠的矩阵中直接推导出这个结果

$$\begin{bmatrix}0.429 & 1.429\\-0.571 & 0.429\end{bmatrix}$$

若 $V_1=0$，则

$$\begin{bmatrix}y_2\\V_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & B\\C & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Ay_1\\Cy_1\end{bmatrix}$$

所以，光线 $\begin{bmatrix}y_2\\V_2\end{bmatrix}$ 与光轴在 $-ny_2/V_2=-A/C$ 处相交，交点与球珠的右端相距 $0.429/0.571=0.75$ cm。

注意上述计算仅仅考虑了光束的其中一部分即中心近轴光线，忽略了另一部分即可以造成球差的外部光线。

例题 4 有一块焦距为 +8 cm 的正透镜（会聚透镜），将其放在离一块焦距为 −12 cm 的负透镜（发散透镜）左侧 6 cm 的地方。若将一个 3 cm 高的物体放在这两个透镜的光轴上，并与正透镜的左端相距 24 cm，试求像的位置和大小。（见图 2.13）。

解：用米和屈光度为 D 单位来运算。正透镜的光焦度是 $+100/8=+12.5\,D$，负透镜则是 $-100/12=-8.33\,D$。若像位于负透镜的右侧 X 米处，则从像回到物的矩阵链是

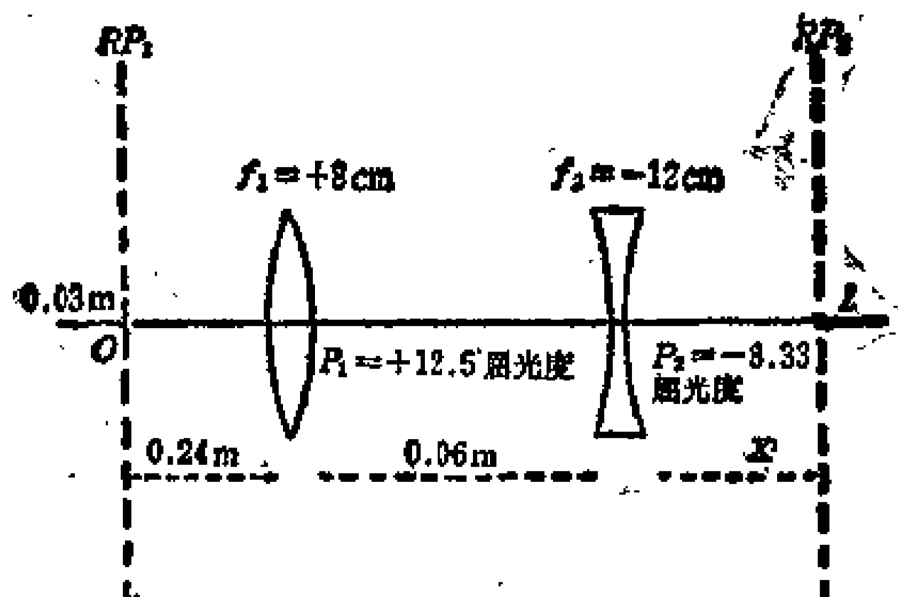


图 2·13

$$M=\begin{bmatrix}1 & X\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\8.33 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0.06\\0 & 1\end{bmatrix}$$

（像到负透镜）（负透镜）（两透镜之间的间隔）

$$\times\begin{bmatrix}1 & 0\\-12.5 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0.24\\1 & 0\end{bmatrix}$$

（正透镜）　（正透镜到物）

$$=\begin{bmatrix}1 & X\\0 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 0.06\\8.33 & 1.5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 0.24\\-12.5 & -2\end{bmatrix}$$

所以

$$\begin{bmatrix}A & B\\C & D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & X\\0 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0.25 & 0.12\\-10.42 & -1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.25-10.42X & 0.12-X\\-10.42 & -1\end{bmatrix}$$

为了保持物——像关系，必须有 $B=0.12-X=0$，因而 $X=0.12$ m。放大率是 $1/D=-1$，所以，最后的像高为 3 cm，而且是个倒像，它位于负透镜的右侧 12 cm 处。

例题 5　将一个物体放在离一个薄透镜左侧的距离为 U 的

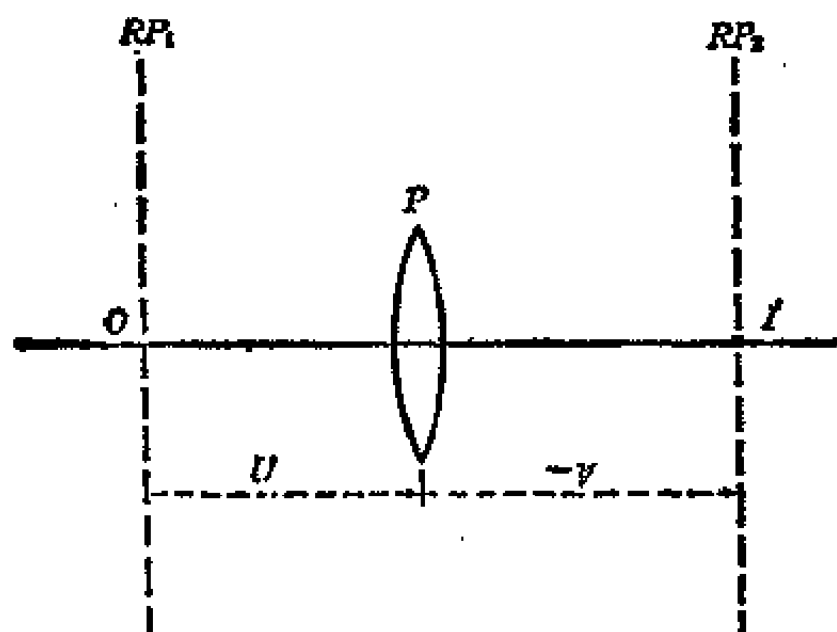


图 2·14

地方，所形成的像与该透镜左侧相距为 V（见图 2.14）。如果现在将物体向左作一小段轴向位移 dU，试求像的相应位移 dV 的表达式；dV/dU 叫作纵向放大率，试证明 dV/dU 等于横向放大率的平方。

解：（注意：若形成的像是实像，则 V 为负值；但是，无论薄透镜是正的还是负的，在虚像的情况下，V 总是正值，不过仍旧存在物距问题。还要注意，在这个以及下一个例题中，V 表示像距而不是表示光学方向余弦。）

从像回到物的矩阵链是

$$M=\underset{\substack{(\text{在 } z \text{ 方向测量}, V \text{ 为}\\ \text{负值, 像到透镜})}}{\begin{bmatrix}1 & -V\\0 & 1\end{bmatrix}}\ \underset{(\text{透镜})}{\begin{bmatrix}1 & 0\\-P & 1\end{bmatrix}}\underset{(\text{透镜到物})}{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & -V\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & U\\-P & 1-PU\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1+PV & U-V+PUV\\-P & 1-PU\end{bmatrix}$$

为了保持物——像关系，右上角元素$(U-V+PUV)$必须是零。因而

$$V=\frac{U}{1-PU}$$

并将上式微分得

$$\frac{dV}{dU}=\frac{(1-PU)(1)+UP}{(1-PU)^2}=\frac{1}{(1-PU)^2}$$

如右下角元素所示，横向放大率的一种表达式是$1/(1-PU)$，其平方与dV/dU表达式一致。可以求得的横向放大率的其它表达式是$(1+PV)$和V/U。(在求解中要注意，现在已经确定了薄透镜中P, U和V之间的一个基本关系。因为

$$(U-V+PUV)=0,$$

所以可以用UV去除该式，并重新整理后，得到一个众所周知的透镜公式

$$\frac{1}{U}-\frac{1}{V}=P=\frac{1}{f}$$

其中f是透镜的焦距。)

例题 6 试证：一个实物与一个用正薄透镜形成的实像之

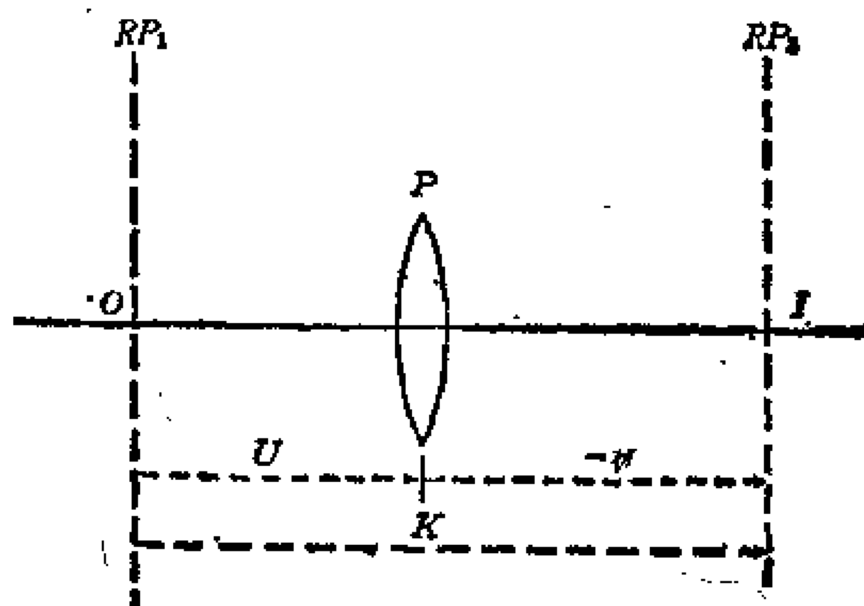


图 2.15

间的距离，不得小于该透镜的四倍焦距。（见图 2.15）

解：和例题5一样，像——物矩阵中的右上角元素是 $(U-V+PUV)$，并且必须为零。而且，因为 U 和 V 都是从薄透镜的左侧测量的，所以 U 必须是正数，不过，对于一个实物所形成的实像，V 必须是负数，若物——像距离是 K，则 $K=U-V$，而 $V=U-K$。所以，以 U 代替 V，得

$$U-(U-K)+PU(U-K)=0$$

故
$$K=\frac{U}{PU-1}+U$$

所以，
$$\frac{dK}{dU}=\frac{(PU-1)\times 1-UP}{(PU-1)^2}+1=1-\frac{1}{(PU-1)^2}$$

为了使 dK/dU 为零，必须有 $PU-1=1$，故 $PU=2$ 或者 $PU-1=-1$，所以 $PU=0$（一种极普通的情况）。因为假设 P 和 U 都是正数，所以，通过对上式的二阶导数：

$$\frac{d^2K}{dU^2}=\frac{d}{dU}\left[\frac{-1}{(PU-1)^2}\right]$$
$$=\frac{-(-2)P}{(PU-1)^3}=\frac{2P}{(PU-1)^3}$$

来进一步考虑 $PU=2$ 的情况。这时，其分母是1，分子为正数；所以 d^2K/dU^2 也为正数，并且 K 的值必须经历一个极小值。若在表达式中用 $U=2/P$ 代替 K，则得：

$$K_{\min}=\frac{2/P}{1}+2/P=4/P=4f$$

其中 $f=1/P$ 仍是表示透镜的焦距。

2.8 用实验方法确定光学系统的矩阵元

首先假设，要考虑的光学系统是一个置于空气中的正透镜系统。第一步是选择两个便于处理的平面，它们分别靠近系统

的第一个和最后一个表面，将它们分别当作输入参考平面 RP_1 和输出参考平面 RP_2。现在要求确定四个元素 A, B, C 和 D，于是

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ V_1 \end{bmatrix}$$

接下去的程序是，在距 RP_1 左侧的不同位置上安放一个已知大小的物体，然后测量每一个合成的实像的大小和位置。

在一般情况下，令 R 表示 $+z$ 方向上物到 RP_1 的距离，令 S 表示 $+z$ 方向上从 RP_2 到实像的距离。现在以 R 和 S 两者仍然都是正数进行运算。

于是，从含有像的平面回到含有物的平面，其光线转移矩阵链是

$$\begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} 1 & S \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & S \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & AR+B \\ C & CR+D \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A+SC & AR+B+S(CR+D) \\ C & CR+D \end{bmatrix} \end{aligned}$$

大家都知道，这个矩阵的行列式等于 1，而且因为物——像关系，矩阵的右上角元素为零。左上角元素 $(A+SC)$ 表示横向放大率；右下角元素 $(CR+D)$ 表示横向放大率的倒数，记作 α。

可以用实验方法测量的两个量是距离 R 和 S，因而比率

$$(\text{物的高度})/(\text{像的高度}) = \alpha = CR+D。$$

（注意，若像是一个倒像，实际情况经常如此，则 α 是负数。）

倘若测出几个与物距 R 值相对应的 α 值，并将结果画成 α 对 R 的曲线图，则这个图是一条直线，其斜率（正切）是 C，在 α

轴上的截点是 D。因而 C 和 D 也就确定了。

由于右上角元素为零，则有

$$AR+B=-S(CR+D)=-S\alpha=\beta,$$

其中 β 是已知的。仿照上述步骤，若将 β 对 R 作图，则直线的斜率是 A，在 β 轴上的截点是 B。一旦所有的四个元素都经确定，就应该检查其行列式 $(AD-BC)$ 是否近似等于1。

2.8.1 负透镜系统

如果待测的系统是一个发散的负透镜，那就必须使用一个辅助透镜将实像投影，实像的大小和到 RP_1 右侧的距离都是已知的。若将负的 R 值选在一个适当范围内，则仍然有可能产生一个位于 RP_2 右侧、其距离可测的实像。不过，这个计算程序相当麻烦。

2.8.2 浸没系统

如果将光学系统浸没在液体中，这样，n_1 表示 RP_1 左侧介质的折射率，n_2 表示 RP_2 右侧介质的折射率，无疑这个实验程序是相当困难的。不过，就分析而论，不管距离 R 和 S 在哪里出现（例如在平移矩阵中），都只需用约化值 R/n_1 和 S/n_2 分别代替 R 和 S。用这种替换计算新的物——像矩阵时，矩阵的右下角元素仍然与测得的 α 值相对应。

2.9 确定光学系统的各个基点

假设，采用计算方法或者用刚才描述的实验方法，已经确定了一个给定的光学系统的矩阵 $M=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$，它将一个选定的输出平面 RP_2 和一个选定的输入平面 RP_1 连接了起来。现在要找出有关这两个参考平面的两个焦点，横向放大率为1的两个主平面和角放大率为1的两个节平面的位置。为了一般性起

见，假设 n_1 和 n_2 分别是系统的左侧和右侧介质的折射率。

(a) 如图 2.16a 所示，首先考虑一条平行于光轴且以高度 y_1 入射到系统中的光线。根据高斯光学的一般概念，这条光线将以同样的高度到达第二主平面，然后，从第二主平面上偏折并通过第二焦点 F_2 出射。所以，对这条光线，v_1 和 V_1 两者皆为零，这样，在 RP_2 平面上，光线转移矩阵表明 $y_2 = Ay_1$ 和

$$v_2 = (V_2/n_2) = (Cy_1/n_2)。$$

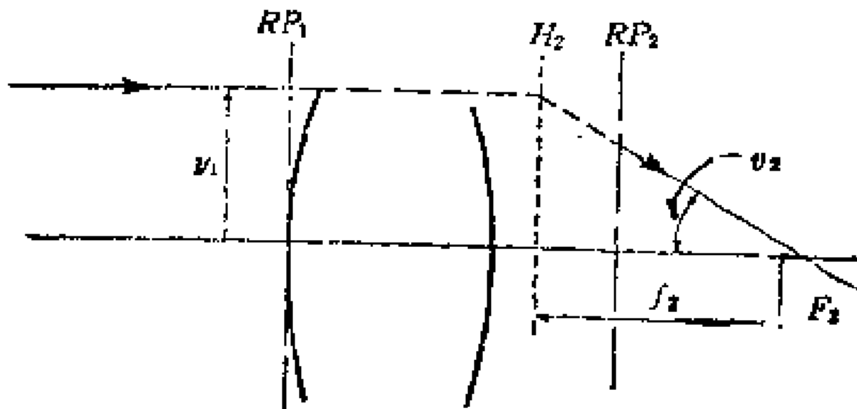


图 2.16a

若 t_2 是 $+z$ 方向上测得的从 RP_2 到 F_2 的距离，则必须有 $t_2 = -y_2/v_2 = -n_2A/C$。从而确定了第二焦点的位置。

当刚才考虑的这条光线从第二主平面 H_2 出射时，它的 y 坐标便是 y_1。所以，若将第二焦距 f_2 定义为从 H_2 到 F_2 的距离，则其值必须是 $f_2 = -y_1/v_2$。所以 $f_2 = -n_2y_1/Cy_1 = -n_2/C$，从而确定了第二焦距。

所以，从 RP_2 到第二主平面的距离是

$$s_2 = t_2 - f_2 = n_2(1-A)/C。$$

(b) 现在考虑光线以入射角 v_1 进入到系统，并通过第一焦点 F_1 之后的情况(见图 2.16b)。在第一主平面 H_1 上，光线偏折并平行于光轴，并且以夹角 v_2 继续通过 RP_2，所以 V_2 等于零。

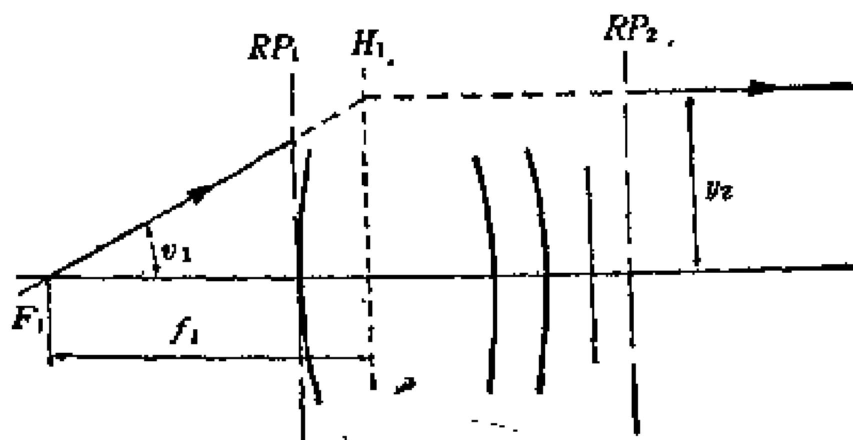


图 2.16b

因而可以写成 $V_2=Cy_1+Dn_1v_1=0$ 和 $y_1=-Dn_1v_1/C$。从图解来看，F_1 离 RP_1 的距离由 $t_1=-y_1/v_1=n_1D/C$ 给出。它确定了第一焦点的位置。

仍然考虑同一条光线，记得在第一主平面上，光线的 y 坐标必须是 $y_2=Ay_1+Bn_1v_1$。所以，若定义第一焦距 f_1 为从 F_1 到 H_1 的位移，则应当有

$$f_1=y_2/v_1=-DAn_1/C+Bn_1=-n_1(AD-BC)/C。$$

因为 $(AD-BC)=1$，所以最终得到第一焦距 $f_1=-n_1/C$。

于是，第一主平面 H_1 到 RP_1 的距离

$$s_1=t_1+f_1=n_1(D-1)/C。$$

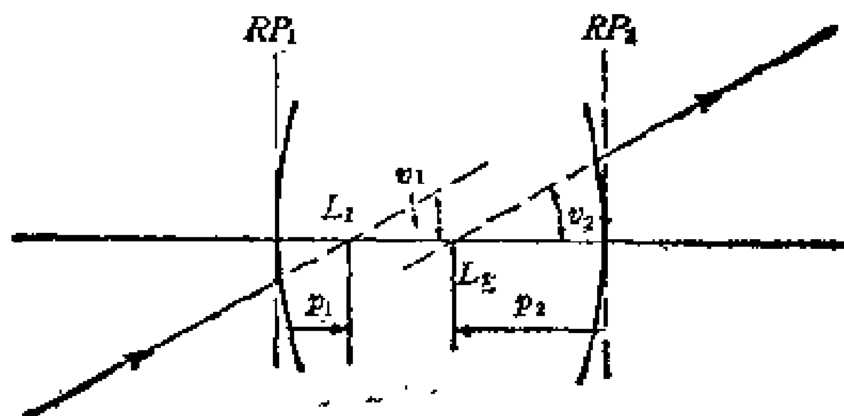


图 2.16c

(c) 最后，希望确定这样的两个节点 L_1 和 L_2，即任何一条进入到系统并射向 L_1 的光线，好象是一条从 L_2 来且与光轴构成同样大小夹角($v_2=v_1$)的光线(见图2.16c)。令 p_1 和 p_2 分别表示从 L_1 到 RP_1 以及从 L_2 到 RP_2 的距离。因而，从第二节点 L_2 回到第一节点 L_1 的矩阵链是：

$$\begin{bmatrix}1 & p_2/n_2\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A & B\\C & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -p_1/n_1\\0 & 1\end{bmatrix}$$

(从 L_2 到 RP_2) (从 RP_2 到 RP_1) (RP_1 到 L_1)

$$=\begin{bmatrix}1 & p_2/n_2\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A & -(Ap_1/n_1)+B\\C & -(Cp_1/n_1)+D\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}A+(p_2C/n_2) & -(Ap_1/n_1)+B+p_2[-(Cp_1/n_1)+D]/n_2\\C & -(Cp_1/n_1)+D\end{bmatrix}$$

(注意，已经使用了约化距离，从 RP_1 到 L_1 的 $\mathscr{T}$ 矩阵使用的是 $-p_1$，而不是 p_1。)

用 ϕ 来表示刚才得到的矩阵，用 y_0 和 v_0 表示进入到 L_1 平面的光线的坐标；y_3 和 v_3 表示离开 L_2 平面的光线的坐标。于是有

$$y_3=\phi_{11}y_0+\phi_{12}V_0=\phi_{11}y_0+\phi_{12}(n_1v_0)$$

以及 $$n_2v_3=V_3=\phi_{21}y_0+\phi_{22}V_0=\phi_{21}y_0+\phi_{22}(n_1v_0)$$

但是，若 L_1 和 L_2 都是节点并且 $y_0=0$，则不管 v_0 值为多少，必须有 $y_3=0$ 和 $v_3=v_0$。只有当 $\phi_{12}=0$ 和 $\phi_{22}(n_1/n_2)=1$ 时，即如果矩阵 ϕ 是一个具有横向（即线）放大率 $1/\phi_{22}=(n_1/n_2)$ 的物——像矩阵时，这才是正确的。

从方程 $\phi_{22}=(n_2/n_1)$ 得到 $p_1=(Dn_1-n_2)/C$。将 p_1 代入方程 $\phi_{12}=0$，最终得 $p_2=(n_1-An_2)/C$。

为了方便起见，现在将这些结果列表如下：

各个基点和焦距	测量起止点		用矩阵元表示	在 $n_1=n_2=1$ 特殊情况时
第一焦点	RP_1	F_1	n_1D/C	D/C
第一焦距	F_1	H_1	$-n_1/C$	$-1/C$
第一主点	RP_1	H_1	$n_1(D-1)/C$	$(D-1)/C$
第一节点	RP_1	L_1	$(Dn_1-n_2)/C$	$(D-1)/C$
第二焦点	RP_2	F_2	$-n_2A/C$	$-A/C$
第二焦距	H_2	F_2	$-n_2/C$	$-1/C$
第二主点	RP_2	H_2	$n_2(1-A)/C$	$(1-A)/C$
第二节点	RP_2	L_2	$(n_1-An_2)/C$	$(1-A)/C$

上表的右面一列说明，对经常遇到的置于空气中的光学系统来说，两个节点和两个主点是相重合的；这是由于单位角放大率和单位线放大率的条件是相同的。其次，两个焦距都由 $-1/C$ 给定。(其中，折射率不等于1，"约化焦距"由 $-1/C$ 给定。)

为了完成对近轴折射系统的基本论述，现在来看看，如果不变换从 RP_1 到 RP_2 的光线数据，而是将矩阵 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ 变换到(a)两个主平面之间，或(b)两个焦平面之间进行运算，该矩阵会发生什么变化。

(a) 若将矩阵 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ 放在两个主平面之间进行运算，则新的矩阵是

$$\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{1-A}{C} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{1-D}{C} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(H_2 到 P_2)　　(RP_2 到 RP_1)　(RP_1 到 H_1，注意符号相反)

$$=\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{1-A}{C} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & \dfrac{A(1-D)}{C}+B \\ C & \dfrac{C(1-D)}{C}+D \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & \frac{(1-A)}{C}\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A & \frac{(A-1)}{C}\\C & 1\end{bmatrix}$$

(因为 $AD-BC=1$)

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\C & 1\end{bmatrix}$$

上述折射矩阵与一个光焦度为 $P=-C=1/f$ 的薄透镜的矩阵相同。不出所料，RP_1 和 RP_2 之间存在着物——像关系，其横向放大率为 1。

(b) 若将矩阵 $\begin{bmatrix}A & B\\C & D\end{bmatrix}$ 放在两个焦平面之间进行运算，则新的矩阵是

$$\begin{bmatrix}1 & -A/C\\0 & 1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}A & B\\C & D\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1 & -D/C\\0 & 1\end{bmatrix}$$

(F_2 到 RP_2)　(RP_2 到 RP_1)　(RP_1 到 F_1，注意符号相反)

$$=\begin{bmatrix}1 & -A/C\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A & \frac{-AD}{C}+B\\C & \frac{-CD}{C}+D\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & -A/C\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A & -1/C\\C & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & -1/C\\C & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & f\\-1/f & 0\end{bmatrix}$$

这个矩阵表示了一个众所周知的结果，第二焦平面上的光线高仅仅与第一焦平面的偏向角有关，而第二焦平面的偏向角仅仅与第一焦平面的光线高有关。而且，若用 y_1/V_1 表示一个物点的焦距 z_1(从 F_1 向左量)，并以 y_2/V_2 表示一个相应的像点的焦距 z_2，便立刻得到

$$z_1 z_2 = (y_1/V_1)(y_2/V_2) = -f^2 \quad \text{（牛顿方程）}$$

不出所料，该矩阵的主要元素都为零，这表明 RP_1 和 RP_2 分别位于两个焦平面上。假定通过这个变换，等效的焦距不变，元素 C 也仍然不变，则对于仍然是幺模的矩阵，其右上角元素必须等于 $-1/C$。

2.10 进一步的例题

例题 7 将一块半径为 r，折射率为 n 的半球面玻璃作为透镜，通过它的光线仅限于那些几乎与光轴相平行的光。若透镜的平面向左，试证明，第二主点就是凸面和光轴的交点（即顶点）。再证明，第一主点落在透镜内部，并与平面相距 r/n，且透镜的焦距等于 $r/(n-1)$。（见图 2.17）

解：若将两个参考平面分别定位在半球的两个表面上，则矩阵链是

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{-(1-n)}{-r} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & r/n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

（在曲面 RP_2 上的折射）　（透镜的约化厚度）　（RP_1 平面上折射的一种极普通的情况）

$$= \begin{bmatrix} 1 & r/n \\ \dfrac{-(n-1)}{r} & 1/n \end{bmatrix}$$

（尽管这是一个非常简单的计算，但仍然要谨慎地验算其行列式。）现在，可从上一节中的表格右列找到所需要的结果。从 RP_2 到第二主点的距离是 $(1-A)/C$，其值为零。从 RP_1 到第一主点的距离是

$$(D-1)/C = (1/n-1) \times r/-(n-1) = r/n。$$

因为 $n>1$，所以这个距离小于半球透镜的厚度 r。

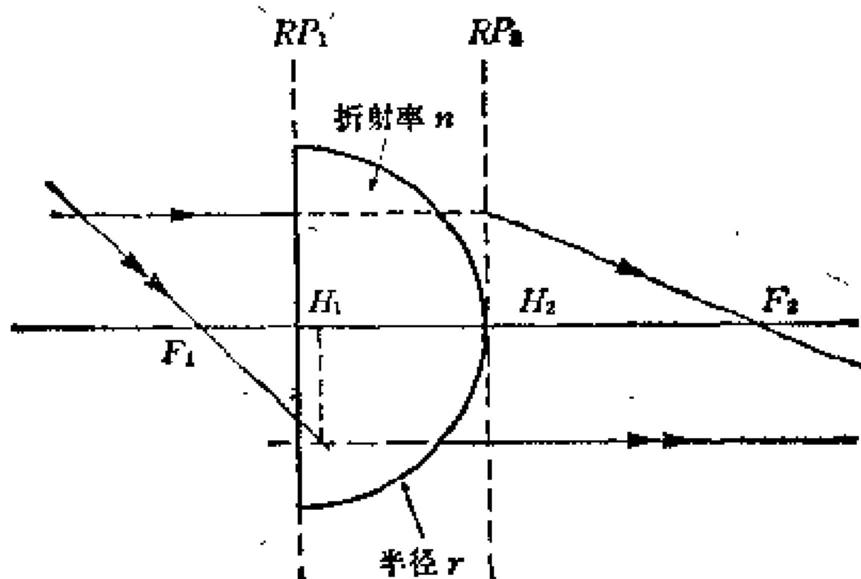


图 2.17

在空气中任意一个方向上测得的焦距都是

$$-1/C = r/(n-1)。$$

例题 8 有一个焦距为 10 cm 的正薄透镜和一个焦距为 −10 cm 的负薄透镜，两镜相距 5 cm(见图 2.18)。求两镜组合后的等效焦距以及焦平面和主平面的位置。

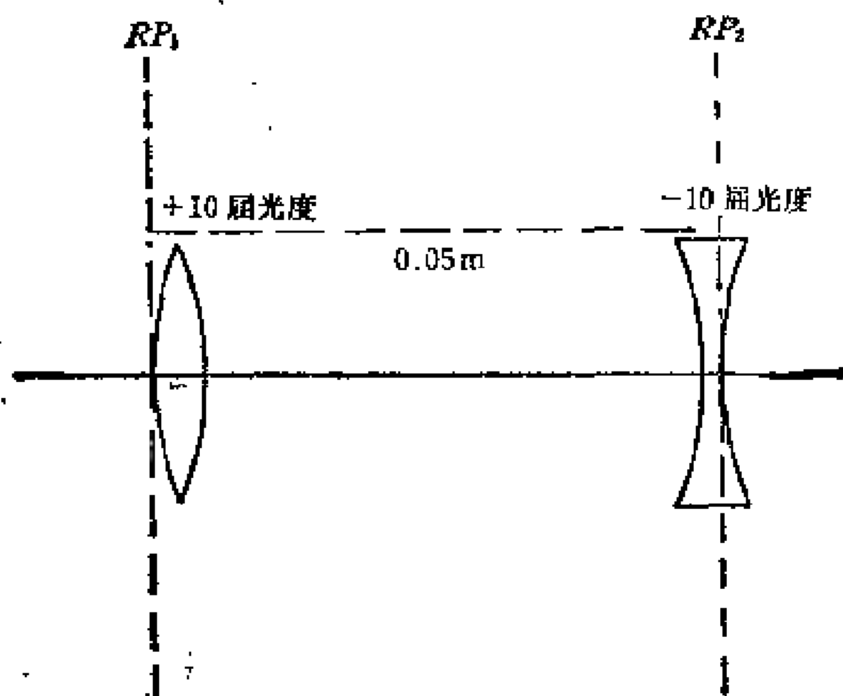


图 2.18

解　假设正薄透镜置于这个光学系统的左侧，将两个参考平面分别定位在两个透镜位置上。并将距离换算成米，焦距为屈光度，可以得到该系统矩阵为

$$M=\begin{bmatrix}1 & 0\\10 & 1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1 & 0.05\\0 & 1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1 & 0\\-10 & 1\end{bmatrix}$$

（负透镜位于 RP_2 处）（两透镜间间距）（正透镜位于 RP_1 处）

$$=\begin{bmatrix}1 & 0.05\\10 & 1.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\-10 & 1\end{bmatrix}$$

所以

$$\begin{bmatrix}A & B\\C & D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.5 & 0.05\\-5 & 1.5\end{bmatrix}$$

验算其行列式，求得 $(AD-BC)=(0.5)(1.5)+(5)(0.05)=1$。再查阅 2.9 节表中所列的结果，求得两透镜组合后的焦距应当是 $-1/C=+0.2\,\mathrm{m}=20\,\mathrm{cm}$（光焦度 $=+5\,D$）。

第一焦点与 RP_1 右侧相距 $D/C=-0.3\,\mathrm{m}$，与正透镜左侧相距 30 cm。因为等效焦距是 20 cm，所以立即就可以看出，第一主平面与正透镜左侧相距 10 cm。（根据这个公式，得出第一主平面离 RP_1 右侧的距离为 $(D-1)/C=0.5/-5$，以 m 为单位。）

第二焦点到 RP_2 右侧（负透镜）的距离为

$$-A/C=-0.5/-5=0.1\,\mathrm{m}=10\,\mathrm{cm}。$$

或者是根据直接推理，或者是应用公式 $(1-A)/C$，都可以求出第二主平面与负透镜左侧相距 10 cm，与正透镜则相距 5 cm。

按这种方式组装的光学系统，实际上就是一个结构粗糙的摄远物镜，其焦距比安放透镜及其聚焦像平面所需的管筒长。

例题 9　有两个光焦度分别为 P_1 和 P_2 的正薄透镜，两透镜相距 t 并构成一个反射望远镜的目镜（见图 2.20）。试证明，该目镜的等效焦距是 $(P_1+P_2-P_1P_2t)^{-1}$。若两透镜都由同样

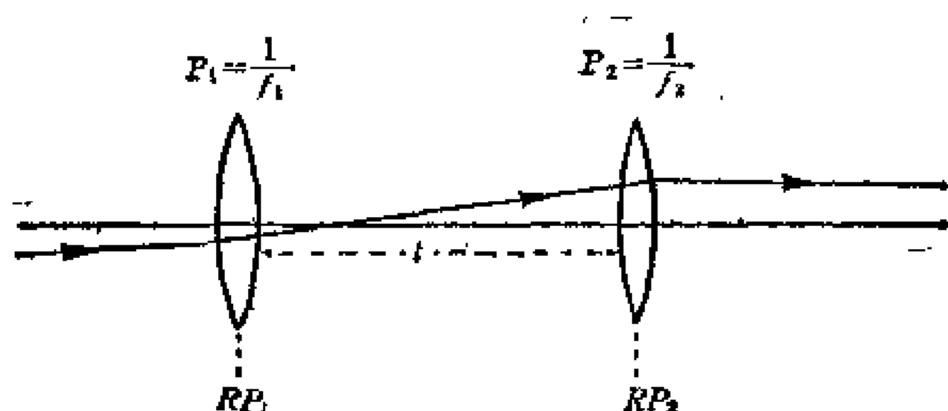


图 2.19

的玻璃做成，问如何避免横向色差？这样一个目镜会是消纵向色差的吗？

解： 和前一个例题一样，将两个透镜分别选择作为输入、输出参考平面，得到该系统矩阵：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P_2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P_1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & t \\ -P_2 & 1-P_2t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P_1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1-P_1t & t \\ -P_2-P_1+P_1P_2t & 1-P_2t \end{bmatrix}$$

从左下角元素来看，等效焦距显然由下式给定：

$$1/f=(P_1+P_2-P_1P_2t)$$

因为这个目镜将作为一个无色差的反射物镜，而任何一种玻璃的折射率都会随波长的变化而有细小的变化，所以，只有当目镜的等效焦距保持不受这些变化的影响时，一个用合成望远镜观察的天文物体的角放大率，才仍然保持与波长变化无关。

和 2.4 节中说明的一样，任何一个薄透镜的光焦度 P 都等于$(n-1)$和一个纯几何因子 G 的乘积，其中，G 表示两个球面曲率之差。所以，对于该组合透镜，可以写成：

$$1/f=(n-1)(G_1+G_2)-(n-1)^2G_1G_2t$$

将上式微分，得

$$\frac{d(1/f)}{dn}=G_1+G_2-2(n-1)G_1G_2t$$

为使该导数等于零，必须有

$$t=\frac{G_1+G_2}{2(n-1)G_1G_2}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(n-1)G_2}+\frac{1}{(n-1)G_1}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{P_2}+\frac{1}{P_1}\right]=(f_1+f_2)/2$$

诚然，这个条件是经典的冉斯登(Ramsden)和惠更斯目镜的基础。

遗憾的是，尽管刚才得到的这个条件避免了横向色差或放大率的色差，但它并不保证这种目镜是消纵向色差的。如2.9节表中所示，这种系统的第一焦点与RP_1左侧相距D/C。尽管已经保证了上述表达式中的分母仍然与n的细小变化无关，但对其分子$D=1-P_2t=1-(n-1)G_2t$，n显然会产生影响。所以，在观察一个星象时，这个目镜所放置的最佳焦点仍会随波长变化而稍有改变。

（除了这些色差问题可以用近轴方法处理之外，请记住，即使是小角视场，在使用短焦率的牛顿反射望远镜时，如此简单的目镜，其球差也是令人讨厌的。）

例题10 一块中心厚度为3 cm的玻璃透镜，光轴通过其中心，一个球面的曲率半径是5 cm且凸面向外；另一个球面的曲率半径是2 cm，凹面向外。前一个球面置于左侧并与空气接触；后一个球面与折射率为1.4的某种液体接触。若玻璃的折射率为1.5，分别求该系统的两个焦点，两个主点和两个节点的位置，并计算系统的焦距。（见图2.20）

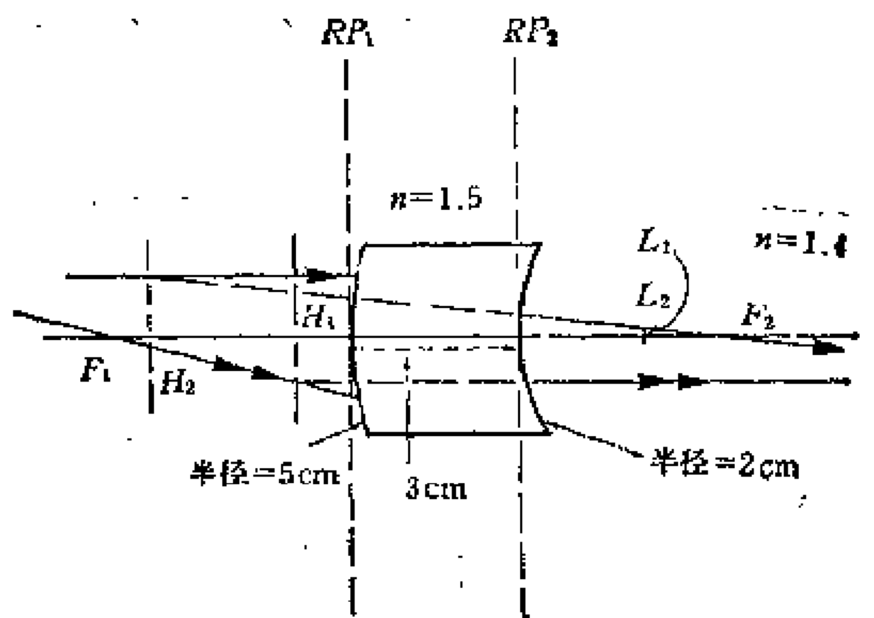


图 2.20

解：可以再次得到系统矩阵，然后使用 2.9 节表中所列的结果，请记住，这一次使用的是表格的中间一列。若将两个参考平面分别选择在透镜的两个球面上，并以厘米为单位，则矩阵 M 是

$$M=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \dfrac{-(1.4-1.5)}{+2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \dfrac{3}{1.5}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ \dfrac{-(1.5-1)}{+5} & 1\end{bmatrix}$$

(透镜的浸没凹面)　(透镜厚度)　(透镜凸面)

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0.05 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -0.1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0.05 & 1.1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -0.1 & 1\end{bmatrix}$$

所以 $$M=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.8 & 2\\ -0.06 & 1.1\end{bmatrix}$$

验算： $$\det(M)=(0.8\times1.1)+(2\times0.06)=1$$

要记住，在这个例题中，$n_1=1$，而 $n_2=1.4$，从 2.9 节中列的表得到如下的解：

光学系统的输入面：$n_1=1$

基　　点	位置(到 RP_1 右侧，以厘米为单位)
第一焦点 F_1	$D/C=1.1/-0.06=-18.3$
第一主点 H_1	$\frac{(D-1)}{C}=0.1/-0.06=-1.67$
第一节点 L_1	$\frac{Dn_1-n_2}{C}=\frac{1.1-1.4}{-0.06}=+5.0$

第一焦距

$$f_1=-1/C=-1/(-0.06)$$
$$=+16.7\,\mathrm{cm}\quad(+6\,\mathrm{D})$$

光学系统的输出面：$n_2=1.4$

基　　点	位置(到 RP_2 右侧，以厘米为单位)
第二焦点 F_2	$-n_2A/C=\frac{-1.4\times0.8}{-0.06}=+18.7$
第二主点 H_2	$\frac{n_2(1-A)}{C}=\frac{1.4\times(1-0.8)}{-0.06}=-4.67$
第二节点 L_2	$\frac{n_1-An_2}{C}=\frac{1-(1.4\times0.8)}{-0.06}=+2.0$

第二焦距

$$f_2=-n_2/C=-1.4/-0.06=+23.3\,\mathrm{cm}$$

对于这个单心光学系统，其两个节点 L_1 和 L_2 相重合，它们都位于两个球面的公共曲率中心上。

2.11　将光线转移法引伸到反射系统

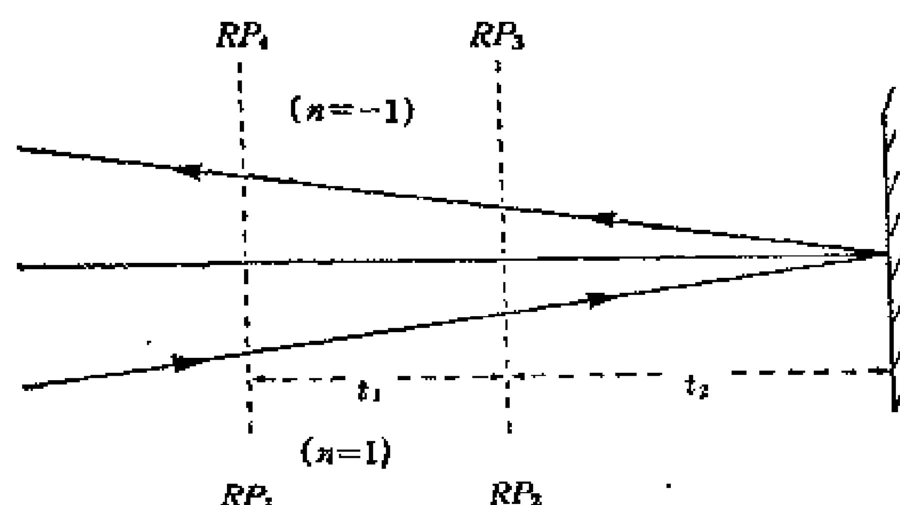
多少是为了使陈述简单点的缘故，有关近轴光学系统的讨论至今仍局限于仅仅含有折射表面的通用型光学系统。但是，为了达到较好的光学性能，人们已越来越多地不惜代价，采用反射折射型光学系统了。为此，很有必要在下一章考虑光学谐振腔

的几个反射表面问题。所以，本段落将有关论述引伸到包含有反射表面的光学系统。

为了既能达到上述目的，而又仍然使用已经描述过的光线矢量和 $\mathscr{T}$ 以及 $\mathscr{R}$ 矩阵，那就必须有一条基本规则：一条光线无论何时在 $-z$ 方向内传播，它所通过的介质的折射率必须取负值。现在来考虑这条规则对光线转移矩阵公式中三个分量的每一个分量的影响。

2.11.1 光线矢量的说明

在说明光线 $\begin{bmatrix} y \\ V \end{bmatrix}$ 的数据时，必须记住，不是 V，而是 V/n 规定了光线方向与光轴之间的几何夹角 v。例如，当一条光线从一个垂直于光轴的平面反射时（见图 2.21），其返回的光线方向 v 在符号上相反，但 n 值仍然不变，因而，光线方向余弦 V 仍然



（光沿着 $-z$ 方向传播，则要改变折射率的符号）对于两个平面之间的转移，则

$$M_{21}=\begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{32}=\begin{bmatrix} 1 & 2t_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{43}=\begin{bmatrix} 1 & (-t_1/-1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

图 2.21

不变。这意味着，象斯涅耳折射定律的近轴形式一样，反射定律已经包含在牵涉到任何平面反射镜或任何平的折射表面

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ V_1 \end{bmatrix}$$

的论述中。在考虑 $\mathscr{R}$ 矩阵时，将简略地回顾这一点。

2.11.2 $\mathscr{T}$ 矩阵

当光线从一个平面 $z=z_1$ 穿过一个间隔到达另一个平面 $z=z_2$ 时，若光线沿着 $+z$ 方向传播，则间隔值 (z_2-z_1) 为正数；若沿着 $-z$ 方向传播，则间隔值为负数。另一方面，在后一种情况下，介质的折射率必须取负数，这样，间隔的约化厚度仍然保持是正数，也就是两个负数的比率。所以，假定用一种普通的方法从输出回到输入来计算一个矩阵链，那么，在各种 $\mathscr{T}$ 矩阵中，表示约化间隔的 T 值都是正数。

2.11.3 $\mathscr{R}$ 矩阵

现在，采用术语 $\mathscr{R}$ 矩阵来描述一个反射表面和一个折射表面的作用。为了计算一个反射曲面的折射本领 P，用负的折射率 n 来代替第二个介质折射率 n_2，以修正公式 $P=(n_2-n_1)/r$。将反射器浸没在这种负折射率 n 的介质中，而且，反射后的光线也继续在这种介质中传播。因而折射本领 P 等于 $-2n/r$，$\mathscr{R}$ 矩阵则是 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2n/r & 1 \end{bmatrix}$。

在这里，重要的是要记住，象一个透镜表面一样，若反射镜的曲率中心位于其表面的右侧，它的曲率半径便取作正数。例如，若将一个凸面反射镜的凸面向左安放，以便将光线反射回到 $-z$ 方向时，便属于这种情况。和一个属于发散透镜的情况一样，这样一个凸面反射镜（发散的）的光焦度便取作负数，因而，$\mathscr{R}$ 矩阵的左下角元素是正的。

注意，若将同一个凸面反射镜转过来，使镜面向着另一个方向，则曲率半径 r 和折射率 n 两者都需要改变符号，这样，矩阵本身仍然不变。一个发散(凸面)反射镜的光焦度 P 总是负数，而一个凹面(会聚)反射镜的 P 值却总是一个正数。

2.11.4 几个相继的平面

显然，象折射情况一样，一个 r 为无穷大的平面的反射，可以用一个单位矩阵表示成一种极普通的形式。所以，若光线被一连串的全部垂直于轴线的平面向后和向前反射时，我们有理由象以前一样，将各个 $\mathscr{T}$ 矩阵串列在一起，并对包含在各个矩阵中的所有约化厚度一起求和。若以通常的方法(从输出回到输入)计算矩阵链，则所有的约化厚度都有贡献并且是一个正数。例如，若光线在一块厚度为 t 和折射率为 n 的平行平板玻璃内，经过 $2k$ 次内反射之后再出射，则可以通过原始的透射矩阵 $\mathscr{T}\begin{bmatrix}1 & t/n\\0 & 1\end{bmatrix}$，与一个通过 $2k$ 次内反射后的“反射”矩阵 $\mathscr{T}\begin{bmatrix}1 & 2kt/n\\0 & 1\end{bmatrix}$ 的组合，来表示该平板的作用。(见图 2.22)除了每次反射产生的衰减之外，这些出射光线的几何形状，都和一次通过一块平板的透射光的几何形状相同，这时，这一块平板的厚度为原有厚度 t 的 $(2k+1)$ 倍。

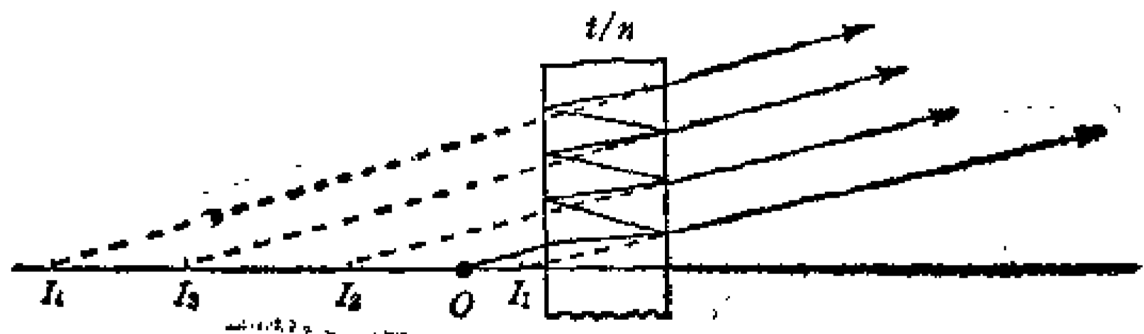


图 2.22

为了小结本章，现在来计算一个简单的反射折射光学系统的总矩阵。

例题 11

(a) 有一个半径为 r，折射率为 n 的实心玻璃球，光从球的左侧射入(见图 2.23)。当光到达球的右侧时，有一部分光被反射回来，并且再次在左侧出现。将两个参考平面重合在一起，取在球的左侧，试计算在这种情况下的光线转移矩阵。

(b) 将上述求得的矩阵变换到两个相重合的的且通过球心的参考平面上。试解释你的结果，并且特别要讨论 $n=2$ 时的情况。

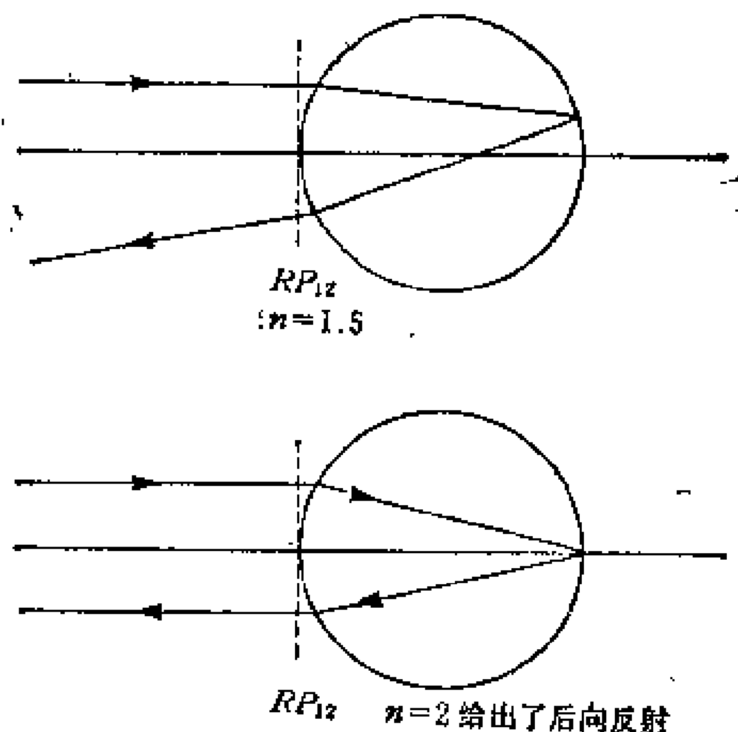


图 2.23

解 (a) 就两个相重合的球左侧所取的参考平面而言，其矩阵链是

$$M=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{-(n-1)}{r} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2r/n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2n/r & 1 \end{bmatrix}$$

(左侧的最后一次折射)(穿过球的返回路程)(右侧的反射)

$$\times\begin{bmatrix}1 & 2r/n\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{-(n-1)}{r} & 1\end{bmatrix}$$

（穿过球的外部路程）（左侧的初始折射）

$$=\begin{bmatrix}\frac{n-4}{n} & \frac{-4r}{n}\\ \frac{-2(2-n)}{nr} & \frac{n-4}{n}\end{bmatrix}\quad\text{（相乘之后）}$$

验算：$\det(M)=\frac{n^2-8n+16}{n^2}-\frac{16-8n}{n^2}=1$。

解 (b) 若希望将这个矩阵变换到两个相重合的位于距球的左侧为 t 的参考平面上，则两个参考平面之间被延长了的路程的作用，可以用在矩阵链的两端各加上同样一个 $\mathscr{T}$ 矩阵 $\begin{bmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 来表示。但是，若将这两个参考平面都向右移，则光线的标志路程变短。为了将两个参考平面都移到球心，必须用矩阵 $\begin{bmatrix}1 & -r\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 左乘和右乘矩阵 M。

所以，就球心而言，新的矩阵是

$$M_1=\begin{bmatrix}1 & -r\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{n-4}{n} & \frac{-4r}{n}\\ \frac{-2(2-n)}{nr} & \frac{n-4}{n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -r\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ \frac{-2(2-n)}{nr} & -1\end{bmatrix}$$

显然，$\det(M_1)=1$。

在解释这个结果时，需要小心一些。矩阵的右上角元素为零，这表示球心的像就落在它自己的位置上（在单心系统中，任

意次的反射或折射都应当如此)。但是,因为左上角元素说明横向放大率不等于 1,而是 -1,所以,如人们想像的那样,该系统的主平面并不在球心上。

当折射率介于 1 和 2 之间时,该系统的等效焦距 $-1/C$ 应当为正数,又因为 $(1-D)=2$,所以主平面位于球心右侧,且离球心为二倍焦距距离的地方。

最后,当 $n-2$ 时,则元素 C 为零,该系统变成一个无焦光学系统,其光线转移矩阵是 $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$。这意味着,尽管其横向放大率 $y_2/y_1=A$ 仍是 -1,但是,如 2.6 节中说明的一样,角放大率却是

$$v_2/v_1=\frac{n_1}{n_2}\left(\frac{V_2}{V_1}\right)=\frac{n_1}{n_2}D=+1$$

(对返回来的光线,因为 $n_2=-n_1$),所以,一条给定的光线出射时具有 y 值,并仍以同一个方向无限次地往返(那里来回到那里去)。具有这种后向——反射特性的另一种形式的光学元件是隅角反射器(它的每个表面都使一条光线的三个方向余弦中的一个改变符号)。(一个具有高折射率的球珠和普通的猫眼后向反射器不一样,它不需要调准;把它作为后向反射器可以在任何方向上都工作得相当好。目前,这类球珠已大量应用于后向反射数字平板。为了减小球差的影响,可以将球珠的折射率选择为 $n=2$,同时也降低了对球珠的光洁度性能的要求。)

2.11.5 两个参考平面相重合的情况

在计算反射系统的矩阵时已证实,最方便的办法是将输入和输出参考平面都取在同一个 z 位置上。在这种情况下,系统有一个固有的对称性,且所得到的光线转移矩阵的主对角元素 A 和 D 应当总是相同的。学生也许已经注意到,这就是例题

11 所考虑的问题。

为了保证在一般情况下都参照上面的做法，现在可以使用这个概念，即任何一条光线的光路都是可逆的。

将一个公共参考平面选择在一个反射光学系统左侧的某个合适位置上，并想象有一条任意选择的沿着$+z$方向传播的试验光线$\begin{bmatrix} y_1 \\ V_1 \end{bmatrix}$，当它返回时，就好象是一条沿着$-z$方向传播的反射光线$\begin{bmatrix} y_2 \\ V_2 \end{bmatrix}$。照例

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ V_1 \end{bmatrix}。$$

现在要证明，在上述矩阵中$A=D$。

现在取这条反射光线$\begin{bmatrix} y_2 \\ V_2 \end{bmatrix}$并将它沿着其原光路返回，于是，形成了第二条试验光线$\begin{bmatrix} y_1^1 \\ V_1^1 \end{bmatrix}$。(见图 2.24)由于涉及到$n$的符号惯例问题，所以这条光线的$V$值应改变符号。这样，

$$\begin{bmatrix} y_1^1 \\ V_1^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ -V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ V_2 \end{bmatrix}。$$

对第二条试验光线进行运算时，反射系统将产生第二条反射光线

$$\begin{bmatrix} y_2^1 \\ V_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1^1 \\ V_1^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ V_1 \end{bmatrix}$$

但是，因为光线径迹可以在两个方向内渡越，所以，第二条反射光线应当在($-z$方向)沿着原始试验光线$\begin{bmatrix} y_1 \\ V_1 \end{bmatrix}$的光路上出



图 2.24

现——换句话说，即

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ V_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2' \\ V_2' \end{bmatrix}。$$

将所有这些结果都集中起来，得到

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ V_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ V_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A & B \\ -C & -D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ -C & -D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ V_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (A^2-BC) & B(A-D) \\ -C(A-D) & (D^2-BC) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ V_1 \end{bmatrix}$$

因为上述方程对一个任意选择的试验矢量 $\begin{bmatrix} y_1 \\ V_1 \end{bmatrix}$ 都必须成立，所以，要计算的矩阵必须先简化成一个单位矩阵。只有，也只有当原始矩阵的两个主对角元素 A 和 D 相等时，$(AD-BC)=1$ 才成立。这就为计算一个反射折射系统的总矩阵提供了一种有效的验算方法。

第三章　光学谐振腔和激光束的传输

近代光学令人惊讶的成就之一是，可以采用几何光线转移方法来描述激光束的产生和传输。为了阐明这些发展，我们将要用到某些波动理论的概念，不过，我们打算当这些概念在课程中一出现时先解释清楚它们的含义，并且希望本章的内容也适用于那些甚至迄今未曾学过物理光学入门知识的读者。我们将从上一章讨论过的矩阵和光线矢量出发，来讨论这些问题。

3.1　回顾近轴成像系统所得到的结果

表1归纳了经常遇到的八种情况下所对应的光线转移矩阵。

为了表示由上述几种情况组合而成的一些光学系统，可以将与这些情况相对应的矩阵相乘，并且在矩阵相乘时是从输出到输入向后运算，所得到的结果便代表了组合系统的总矩阵。如果$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$表示合成的总矩阵，我们先验算其行列式是否等于1，然后再在光线转移方程

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ n_2 v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ V_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ n_1 v_1 \end{bmatrix}$$

中应用这个行列式。

表 2

编号	名称	光学图解	光线转移矩阵
1	平移($\mathscr{T}$ 矩阵)	n t RP_1 RP_2	$\begin{bmatrix} 1 & t/n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
2	在单个表面上的折射 ($\mathscr{R}$ 矩阵)	n_1 r n_2 RP_1 RP_2	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{(n_2-n_1)}{r} & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P & 1 \end{bmatrix}$
3	单个表面上的反射 (见 2.11 节)	n r RP_1 和 RP_2	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2n}{r} & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P & 1 \end{bmatrix}$

(续表)

编号	名称	光学图解	光线转移矩阵
4	置于空气中的薄透镜（焦距为 f，光焦度为 P）	焦距为 f 光焦度 $P=1/f$ RP_1 RP_2	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -(n-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right) & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix}$
5	在空气中，透镜系统的两个主平面之间（焦距为 f）	H_1 H_2 F_1 F_2 RP_1 RP_2	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P & 1 \end{bmatrix}$
6	在空气中，透镜系统的两个焦平面之间（焦距为 f）	H_1 H_2 F_1 F_2 RP_1 RP_2	$\begin{bmatrix} 0 & f \\ -1/f & 0 \end{bmatrix}$

(续表)

编号	名称	光学图解	光线转移矩阵
7	在两个共轭平面之间成像，横向放大率为m，焦距为f	RP_1 RP_2	$\begin{bmatrix} m & 0 \\ -1/f & 1/m \end{bmatrix}$
8	横向放大率为m的无焦系统	RP_2 RP_1	$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 1/m \end{bmatrix}$

3.2 用几何光学描述光的传输

在这里，推广上一章开头时所用的某些观点也许是有用的。正如惠更斯首先指出的那样，用波面来理解光的传播是最好的方法。倘若考虑光波是从一个点光源发出来的，那么可以认为，就好象水池里的涟漪一样，这种波面是向外扩展的，且曲率半径逐渐变大。如果在这些波面传播的路径上放上一个正透镜，便可以将它们重新会聚到另一个点即像点上。另一方面，倘若用一个薄一点的聚焦透镜，那就能产生准直光束，这些准直光束由一些标准的平面波面组成。若在这些波面的光路上加上某些边界或障碍物，那就会破坏波面，并得到衍射效应；可是，在没有这些障碍物时，光的能量是沿着与波面相垂直的方向传播的。

几何光线的概念就是这种波面法线的一种理想化。假定避开焦点或近焦区域，那就可以将光线及其有关的波面设想为一群相互垂直正交的直线簇和一些曲面。

假定，已知波面是一个球面，那么，只要知道与波面相交的法线中的两个光线矢量，这个波面的形状就完全确定了。而且，倘若已知该球面波的曲率中心处于光轴的某一个点上，那么再有另外一个参数，就足以确定这个曲率中心的位置。

现在再回到几何光线模型上来，不过，不是考虑单根光线，而是考虑一个光锥，即一束光线或者是同一个点发出来的一簇光线的情况。例如，图 3.1 示意了若干条从轴向物点 O_1 发散出来的近轴光线，物点 O_1 与参考平面 RP_1 左侧相距 r_1。对于这一簇光线中的所有光线而言，光线高 y_1 与夹角 v_1 的比值均应等于 r_1，亦即

$$r_1=\left(\frac{y_1}{v_1}\right)$$

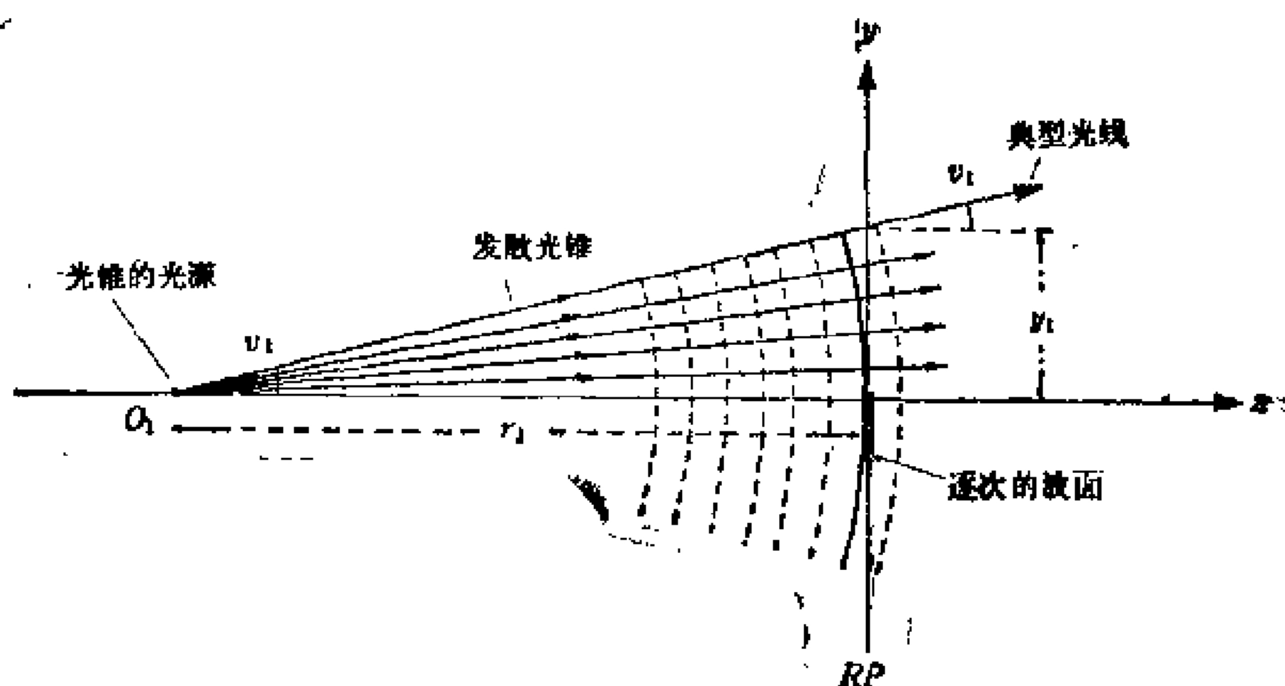


图 3.1

倘若将这个光锥中的每一根光线都看做是与波面相垂直的，则所得的波面应当是球形曲面，其曲率中心位于 O_1 处，并与参考平面 RP_1 左侧相距 r_1；而且，因为光锥中的所有光线都是沿着 $+z$ 方向从左向右传播的，所以，与光锥有关的波面应当是不断地扩展和发散的。

在规定波面曲率的符号时可以发现，当光波发散时，取曲率值为正数较为方便，并且采用“约化值” $R=(r/n)=(y/V)$ 作为曲率半径。采用约化值的一个好处是，当一个光锥无论何时穿越两种介质之间的平面分界面时，与波面有关的 R 值保持不变。（应当如此，因为每一条穿越这样一个分界面的光线，其光线高 y 和光线方向余弦 V 两者都保持不变。）对一个同心的球面波和一个给定的参考平面而言，R 值是单一的表示其几何形状所需要的参数。

现在来考察一下，当光锥通过一个光学系统传输时，与其有关的 (y/V) 值和 R 值会发生什么变化。可以直接从光线转移矩阵得到两个方程：

$$y_2 = Ay_1 + BV_1$$
$$V_2 = Cy_1 + DV_1$$

用第二个方程去除第一个方程，得

$$\frac{y_2}{V_2} = \frac{Ay_1 + BV_1}{Cy_1 + DV_1} = \frac{A\left(\frac{y_1}{V_1}\right) + B}{C\left(\frac{y_1}{V_1}\right) + D}$$

重新将(y/V)值写成 R 值，便得到一个通过光学系统以后，与波面相关的曲率半径约化值 R_2 的重要方程，即

$$R_2 = \frac{AR_1 + B}{CR_1 + D}$$

这是一条很值得牢记的法则，并称之为"$ABCD$ 法则"。它使人们能够非常简便地计算出一个同心球面波从一个参考平面传输到下一个参考平面时，其曲率半径是如何变化的。

3.2.1 有关 $ABCD$ 法则的例题

(a) 若考虑一个发散波越过一个间隔时的传输，则在 $ABCD$ 公式中插入 $\mathscr{T}$ 矩阵，立即得到：

$$R_2 = \frac{1.R_1 + T}{0.R_1 + 1} = R_1 + T$$

(显然，其结果为发散波面)。

(b) 对一个光焦度为 P 的正薄透镜的折射，则在 $ABCD$ 公式中插入 $\mathscr{R}$ 矩阵，得

$$R_2 = \frac{1.R_1 + 0}{-PR_1 + 1} = \frac{R_1}{1 - PR_1}$$

或等效于 $1/R_2 = 1/R_1 - P$。（会聚透镜的光焦度已将波面发散度减小了。）在后面讨论激光束传输时，我们再回到 $ABCD$ 法则上来。

我们至今仅仅考虑了光波的形状和曲率，不过，把光线传播的距离也考虑进去或许是重要的。尤其是在两个光波先分开，然

后又组合起来可能出现干涉效应的情况下，就更有必要考虑光程了。通常，将光程计算所用的表达式称为"程函"；它是表示一条光线在两个参考平面之间所走的距离的公式。

在表示这样一条光线时，采用输入的、或者采用输出的 y 和 V 值，这两种方法都是可行的，不过，通常习惯选用输入的光线高 y_1 和输出的光线高 y_2 来进行运算。现在来考察一下，如何用光线转移矩阵推导出一个程函表达式 $W(y_1, y_2)$，它表示两个参考平面之间的总光程。

虽然上面只是给出了与一条光线有关的 y_1 和 y_2 值，但是通过解下列联立方程组：

$$y_2 = Ay_1 + BV_1$$
$$V_2 = Cy_1 + DV_1$$

仍会得到相应的 V_1 和 V_2 值。显然

$$V_1 = \frac{y_2 - Ay_1}{B} \quad 和 \quad V_2 = Cy_1 + \frac{D(y_2 - Ay_1)}{B}$$

亦即

$$V_2 = \frac{(Dy_2 - y_1)}{B}$$

因为 $(AD - BC) = 1$。

所以，输入光线与轴线的交点 O_1 位于 RP_1 左侧为 R_1 的位置上，其中 R_1 为约化距离，其值 $R_1 = y_1/V_1 = By_1/(y_2 - Ay_1)$。同理，输出光线与轴线交点 O_2 位于距 RP_2 左侧一段约化距离为 R_2 的地方，其中 $R_2 = y_2/V_2 = By_2/(Dy_2 - y_1)$（见图 3·2）。

这里把给定的输入和输出光线设想成是分别代表从物空间的 O_1 点发散出来以及从像空间的 O_2 点发散出来的光锥。显然，O_2 是 O_1 的像，而且，现在应用马吕斯定理(Malus' theorem)，即在任何无像散的成像系统中，沿着所有光线所测得的光程都相等，换言之，一个离开 O_1 的球面波产生了另一个中心为 O_2 的球

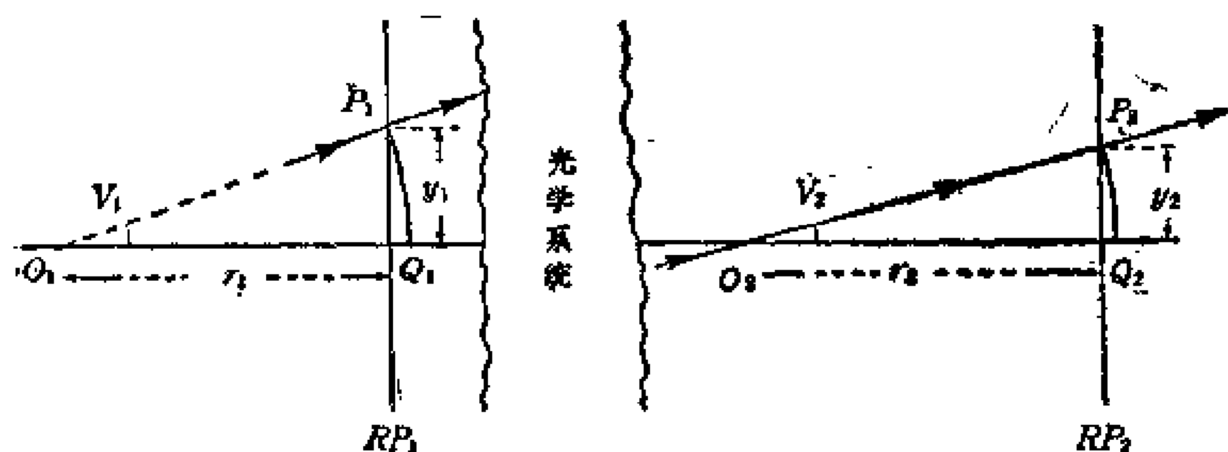


图 3·2

面波。

但是，若考虑一条从图3·2中的O_1到O_2沿着光轴笔直地传播的光线，则所涉及到的光程等于$[n_1(O_1Q_1)-n_2(O_2Q_2)+K]$，其中$K$代表沿着光轴从$RP_1$到$RP_2$所测得的总光程。根据马吕斯定理，从$O_1$经由$P_1$和$P_2$再到$O_2$的总光程必须和上述方括弧表达式相等；为了得到$P_1$和$P_2$之间的光程，必须从上述表达式中减去$n_1\times(O_1P_1)$，并加上$n_2\times(O_2P_2)$。因此，得到一个表示$P_1$和$P_2$之间的总光程的程函为

$$W(y_1,\ y_2)=[K-n_1(O_1P_1-O_1Q_1)+n_2(O_2P_2-O_2Q_2)]$$

两个小括弧内的表达式分别表示到达RP_1和RP_2的球面波的弧矢。若每一个光波的曲率半径都采用约化值$R=r/n$，则式$y^2/2R=ny^2/2r$既正确地表示了几何弧矢，又正确地表示了光波在其间传播的介质的折射率。因此，得：

$$\begin{aligned}W(y_1,\ y_2)&=[K-y_1^2/2R_1+y_2^2/2R_2]\\&=\left[K-\frac{y_1(y_2-Ay_1)}{2B}+\frac{y_2(Dy_2-y_1)}{2B}\right]\\&=\left[K+\frac{(Ay_1^2+Dy_2^2-2y_1y_2)}{2B}\right]\end{aligned}$$

请记住，K是总光程，即$\int n(z)dz$，它是沿着光轴在RP_1和

RP_2之间的光程的积分。因为 K 与 y_1 和 y_2 都无关，所以，只有在干涉仪计算中，当比较两条独立的光程时，K 才有重要意义。

对许多涉及到光的衍射的计算，通常感兴趣的是 W 随 y_1 和 y_2 而发生的横向变化。假设，已知一个复函数 $A_1(y_1)$，它表示光波通过输入平面 RP_1 时的振幅和相位，并且假定希望计算在输出平面上所产生的相应的复函数 $A_2(y_2)$。

倘若只限于一维计算，并且忽略由于缓慢变化的倾斜效应所引起的少量修正，那么，菲涅耳—惠更斯理论给出了如下的衍射方程：

$$A_2(y_2)=\left(\frac{-i}{\lambda B}\right)^{1/2}\int A_1(y_1)\exp\left[\frac{2\pi i}{\lambda}\times W(y_1,\ y_2)\right]dy_1$$

式中，常数项$(-i/\lambda B)^{1/2}$是一个归一化因子，必须用这个因子对方程进行量纲上的修正，而且该因子考虑了当 B 非常大时，输出参考平面上相位扰动变弱的情况。若在 x 方向以及 y 方向上进行计算的话，则振幅将随 B 的减小而线性地下降，而辐照度则有普通的平方反比律。(严格地讲，位于 RP_1 上的一个点光源将在 RP_2 左侧产生一个像(B/D)，而横向放大率是 $1/D$，所以，只需要在归一化因子中插入元素 B。)

现在返回来讨论被积函数，从复指数项的自变数中发现，RP_1 上的每一个元素都使 RP_2 上的波振幅具有一个相位角 ϕ，它等于光程长度 W 除以波长 λ，再乘以 2π。为了设想这个积分是如何建立起来的，可以将它看作是在阿尔岗图 (Argand diagram) 上相应的 ϕ 角上划出来的许多基本矢量的求和。当我们将所有这些矢量的箭头一端与箭头一端联结起来时，则所有矢量的公共起始点与最后合成曲线的终端（即箭头端）的联线，便是输出平面上合成振幅的矢量表示，该矢量的长度的平方则

表示相应的合成的辐照度。

现在来考虑几个有关两个参考平面之间的程函函数的简单例子。

3.2.2 穿越厚度为 t 的空气间隔的传输

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

将上述矩阵元素代入程函公式，得

$$W(y_1, y_2) = \left[t + \frac{1y_1^2 + 1y_2^2 - 2y_1y_2}{2t}\right]$$

$$= \left[t + \frac{(y_1 - y_2)^2}{2t}\right]$$

(如果直接应用毕达哥拉斯定理(Pythagoras' theorem)进行运算，则得到精确的距离为 $[t^2 + (y_1 - y_2)^2]^{1/2}$。不过，对一条联结两个平面的近轴光线而言，比值 $(y_2 - y_1)/t$ 一定是个很小的数，所以上述的近似是完全可以的。)

将上述程函表达式插入到衍射方程中，就可以按菲涅耳衍射来处理这些问题。例如，若用一个振幅为 1 的平面波照明 RP_1，并用一个吸收刃边将 RP_1 的一半遮住，则将产生这样一种状况，即当 $y_1 > 0$ 时，$A_1(y_1) = 1$；和 $y_1 \leqslant 0$ 时，$A_1(y_1) = 0$。于是，在 RP_2 上产生的阴影图的振幅分布由下式给定：

$$A_2(y_2) = \left(\frac{-i}{\lambda t}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} A_1(y_1) \exp\left[\frac{2\pi i}{\lambda}\left(t + \frac{(y_2 - y_1)^2}{2t}\right)\right] dy_1$$

$$= \left(\frac{-i}{\lambda t}\right)^{1/2} \exp\left[\frac{2\pi i t}{\lambda}\right] \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda t}(y_2 - y_1)^2\right] dy_1$$

式中的积分被称为“菲涅耳积分”；用阿尔岗图对菲涅耳积分进行图解时，其结果就是考纽螺线(Cornu spiral)。

因为一个间隔的程函表达式仅仅是差值 $(y_2 - y_1)$ 的函数，所以，由衍射公式推知的新的振幅分布 $A_2(y_2)$，可以看作是原

始振幅分布 $A_1(y_1)$ 与程函项产生的二次相位变化两者的卷积；有时称 $A_2(y_2)$ 为 $A_1(y_1)$ 的"阴影变换"。在伽柏(Gabor)早期关于"同轴"全息照相的工作中，这一类变换是重要的。

3.2.3 在透镜的两个焦平面之间的转移

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & f \\ -1/f & 0 \end{bmatrix}$$

因为 A 和 D 皆为零，所以得

$$W(y_1, y_2) = K - (y_1 y_2 / f)$$

式中，K 是两个焦点之间的光学距离。

对任何一个给定的 y_1 值，在输出平面的横切面上，程函都呈线性变化，换言之，一个离轴的点光源 y_1 在透镜的另一方产生了一个平面波，它倾斜了 $\partial W/\partial y_2 = -(y_1/f)$ 弧度。

倘若将这个程函插入到衍射方程中可以发现，因为二次相位项为零，所以，现在按夫琅和费衍射 (Fraunhofer diffraction) 这种特殊情况来处理。$A_1(y_1)$ 和 $A_2(y_2)$ 之间的关系式是一个傅里叶变换关系式 (Fourier transform relationship)：

$$A_2(y_2) = \left(\frac{-i}{\lambda f}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} A_1(y_1) \exp\left[\frac{2\pi i}{\lambda}(K - y_1 y_2/f)\right] dy_1$$

$$= \left(\frac{i}{\lambda f}\right)^{1/2} \exp\left[\frac{2\pi i K}{\lambda}\right]$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} A_1(y_1) \exp[-2\pi i (y_1 y_2 / f\lambda)] dy_1$$

例如，若用一个振幅为 1 的平面波照明 RP_1，并且这里引进一个只有中央部分即 $a > y_1 > -a$ 透光的狭缝光阑，则在 RP_2 上所产生的振幅将由下式给定：

$$A_2(y_2) = \left(\frac{-i}{\lambda f}\right)^{1/2} \exp\left[\frac{2\pi i K}{\lambda}\right]$$

$$\times \int_{-a}^{a} \exp[-2\pi i (y_1 y_2 / f\lambda)] dy_1$$

$$=\left(\frac{-i}{\lambda f}\right)^{1/2}2a\exp\left[\frac{2\pi iK}{\lambda}\right]\left[\frac{\sin(2\pi ay_2/f\lambda)}{(2\pi ay_2/f\lambda)}\right]$$

在 RP_2 上，光将会垂直地聚焦到一个点上。

由于衍射效应，透镜焦平面上的光波将产生一个宽度有限的像。实际观察到的像的照度分布 $I_2(y_2)$ 由下式给定：

$$I_2(y_2)=A_2(y_2)A_2^*(y_2)=\left(\frac{4a^2}{\lambda f}\right)\left[\frac{\sin(2\pi ay_2/f\lambda)}{(2\pi ay_2/f\lambda)}\right]^2$$

当 y_2 非常小时，上式的方括弧达到最大值，即为1，因为

$$\lim_{z\to 0}\left(\frac{\sin z}{z}\right)=1$$

所以，对相干照明而言，像中央的亮度随狭缝宽度的平方而增大。这里，有两个因素在起作用；当加大狭缝的宽度时，不仅会使更多的能量进入到透镜，而且也使像的衍射扩展减小。我们将在下一节再回到分辨本领这个问题上来，不过，从公式中显然可见，当正弦函数的自变数等于 $\pm\pi$ 时，即当 $y_2=\pm(f\lambda/2a)$ 时，夫琅和费衍射图的亮度应当下降到零(见图 3·3)。

对于这个 y_2 值，其程函表明：RP_1 上狭缝的一边比另一边刚好偏离一个波长。所有可能的相位都可以等同地表示，而且存在着光波扰动局部抵消的区域。倘若用阿尔岗图来分析这种状况，就会发现，当 $y_2=0$ 时，对所有各个矢量求和所得到的结果一定是一条直线；不过，当 y_2 的幅值增加时，得到的则是一条曲线，当 $y_2=\pm(f\lambda/2a)$ 时，这条曲线可以弯曲成一个封闭的圆。对每一根曲线而言，若 $2a$ 表示沿着曲线所测得的长度，则表示合成振幅的弦的长度是 $[2a\sin(2\pi ay_2/f\lambda)]/(2\pi ay_2/f\lambda)$，曲率半径是 $(f\lambda/2\pi y_2)$。(见图 3·4)

3.2.4 B 为零时的情况

在光线转移矩阵中，若 $B=0$，那么，RP_1 和 RP_2 之间就必定存在着成像关系，而且，对从一个给定的 y_1 值所能够画出来

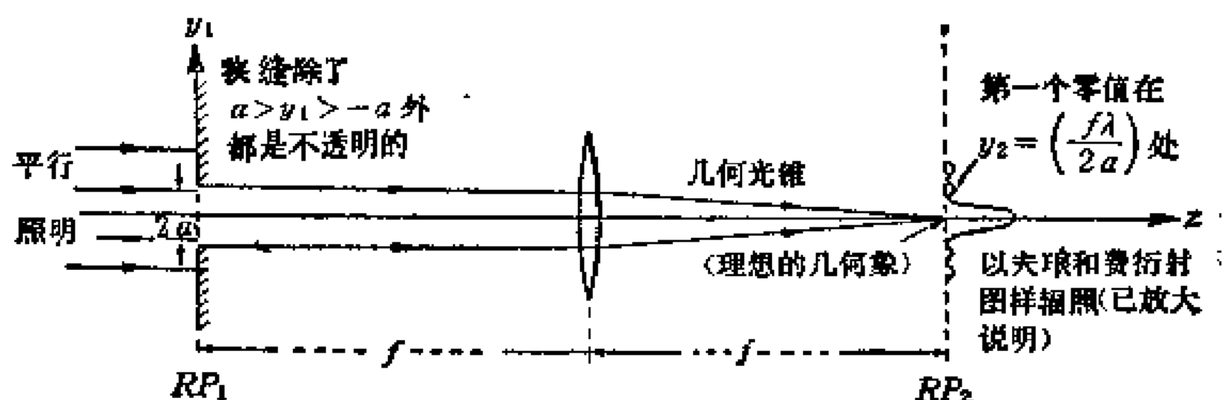


图 3·3

的有效的光线径迹，只存在着一个 y_2 值。所以，毫不奇怪，已经得到的程函函数"告吹"了；它不能有效的回答一个不可能的问题。为了处理这种状况，必须将程函表示为 y_1 和 V_1 的函数，而不是 y_1 和 y_2 的函数。

在重新计算这种特殊情况下的程函 $W(y_1, V_1)$时，将采用简化了的光线转移矩阵$\begin{bmatrix} m & 0 \\ -1/f & 1/m \end{bmatrix}$，它所对应的光学系统列在表 1 的第七项上。

和前面一样，当考虑一条典型的光线时，可以得到同样的方程：

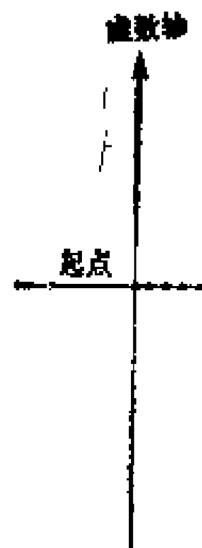
$$W=(K-y_1^2/2R_1+y_2^2/2R_2)=(K-y_1V_1/2+y_2V_2/2)$$

不过，现在需要用 y_1 和 V_1 来表示乘积(y_2V_2)。因此

$$\begin{aligned} W(y_1, V_1)&=[K-y_1V_1/2+(my_1/2)(-y_1/f+V_1/m)] \\ &=(K-my_1^2/2f) \end{aligned}$$

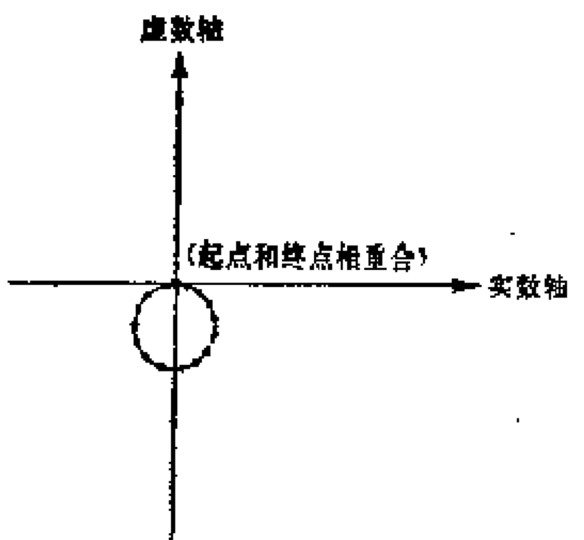
注意，在这种情况下，程函 W 对 V_1 的依赖关系消失了，而它仅仅是 y_1 的函数；从马吕斯定理可以直接推导出这个结论，即光从 y_1 上的物点到 RP_2 上它的像点所走的时间，与沿着由 V_1 表示的所有各种方向的光线所走的时间都相等。

矢量的积分和为 $\int_{-a}^{a}\exp\left[\frac{2\pi i y_1 y_2}{f\lambda}\right]dy_1$



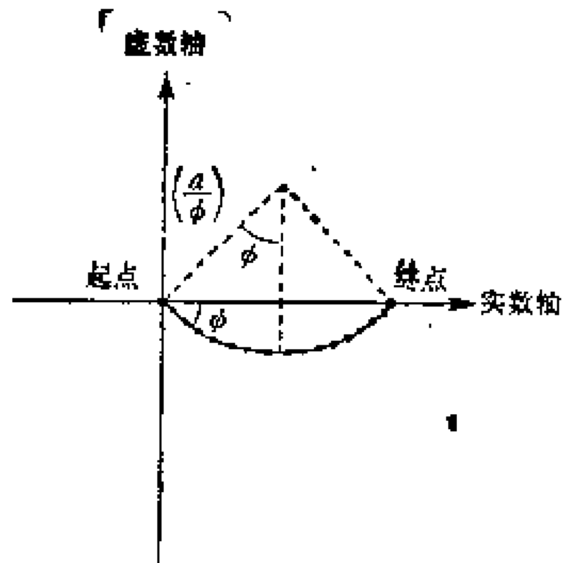
情况 1　$y_2=0$

对所有画出来的矢量，
相位角都保持为零



情况 2　$y_2=\left(\frac{f\lambda}{2a}\right)$

相位角从起点值 $(-\pi)$
稳定地增加到终点值 $(+\pi)$



情况 3　$y_2=\left(\frac{f\lambda}{8a}\right)$

相位角从起点值 $(-\pi/4)$
稳定地增加到终点值 $(+\pi/4)$

若相位角从 $-\phi$ 延伸到 $+\phi$，则长度为 $2a$ 的曲率半径必须为 (a/ϕ)，弦的长度必须为 $2(a/\phi)\sin\phi=2a(\sin\phi/\phi)$（见上图情况 3）。
从被积函数中显然可知，一般为 $\phi=(2\pi a y_2/f\lambda)$ 弧度。

图　3·4

在某些情况下，例如在光学成像处理中，就可能需要一个非常可靠的中继系统。于是，设计者有可能需要使用一个无焦成像系统，以避免程函中的二次项；但是，还是需要考虑三级像差效应，而且制作这种系统的透镜的成本也是昂贵的。

就两个分立的参考平面而言，我们已经定义了在上面刚考虑过的程函函数。无论在什么地方，只要有可能的话，最好将程函函数对称地规定为两个参考平面上光线高的函数。当将另一个横的方向(与图中的平面相垂直)包括进去时，则程函 $W(x_1, y_1, x_2, y_2)$与四个参数都有关。倘若将 RP_1 固定在一个 $z=0$ 的平面上，并用另一个沿着 $+z$ 方向上从 RP_1 逐渐向外变化的可变参考平面来代替 RP_2，那么，就能够发展一个更一般的三维程函函数 $W(x_1, y_1, x, y, z)$。对一个位于参考平面 RP_1 上的(x_1, y_1)处的点光源，它在空间任何其它区域上所产生的波面，就是在整个表面上其 W 值保持恒定的那些表面；于是，纯量 W 函数的局部梯度是一个三维动量矢，这个三维动量矢不仅规定了光波传播的光线方向，而且规定了光波相位随着距离变化的速率。

本节开头曾指出过，$ABCD$ 法则可以得出与一个光锥有关的，或者由一个理想的点光源所产生的非常确定的波面的发展过程。但是，正如我们对程函讨论时已经指出过的那样，由于夫琅和费衍射的模糊效应，从而不可能使光波本身集中，并恢复到一个理想的像点。所以，$ABCD$ 法则预言靠近焦点处的 R 值非常小；这个结果可能是相当错误的。

下一节将更详细地考虑某些对确定光束传播方向角度上的限制。这些限制，不仅对平常的非相干光是重要的，而且对激光谐振腔内所产生的空间相干光也是重要的。

3.3 分辨本领，空间区域和空间带宽乘积

由于光的波长不是无穷小的，所以一束会聚的光线锥所生成的像也决不是一个点；而是一个光斑，其有限宽度由夫琅和费衍射确定。上一节已发现，当一束平行光通过一个宽度为 $2a$ 的狭缝，并用一个焦距为 f 的透镜聚焦时，其中央亮斑在半径为 $(0.5f\lambda/a)$ 处的辐照度下降到零。在直径同样为 $2a$ 的圆孔光阑的情况下，对衍射积分求积所得到的表达式中，除了用同一个一级贝塞耳函数(Bessel function)代替正弦函数外，其结果与狭缝孔径的结果相似。光强分布的中央亮斑就是众所周知的爱里圆斑(Airy disc)，而且，光斑亮度降到零时的半径为 $(0.61f\lambda/a)$，这个值大约比一个宽度为 $2a$ 的方形孔径所得的半径大 22%。孔径越大，像越小，当然，假定透镜是消像差的。

倘若安排一个光学系统，它使两个相同亮度的点光源都形成达到衍射极限的像，如果其中一个像的中心与另一个像的第一个暗环相重合，那么，通常称这两个像为"可分辨的"。

(a) 对一个直径为 d，且像差校正良好的望远物镜而言，两个点光源在焦平面上的距离为 $(1.22f\lambda/d)$，角距离为 $(1.22\lambda/d)$ 弧度。

(b) 对一个显微物镜而言，确定分辨本领的相关光阑位于后焦面上，所以，在看样品时，入射光瞳似乎是无限大的。若用 θ 表示入射光瞳的角半径，当 θ 较小时，在样品平面上的最小分辨距离则为 $(0.61\lambda/\theta)$。实际上，θ 也可能非常大，这时就必须使用更精确的表达式 $(0.61\lambda/\sin\theta)$，或者，若将样品浸没在折射率为 n 的介质中，则表达式为 $(0.61\lambda/n\sin\theta)$。通常，将量 $(n\sin\theta)$ 称为显微物镜的数值孔径($N.A.$)。(对一条离开轴向物点的光线，也可以将数值孔径当作最大的 V 值。)

(c) 第三种情况是一个达到衍射极限的照相物镜，其焦距与直径之比为$(f/d)=F$，它所对应的像的最小分辨距离由式$\Delta y=(1.22F\lambda)$给定。例如，一个在绿光波段上工作的$F/6$透镜，它刚好能分辨相隔4 μm的点或线条的像。（这个公式假设了自发光物体或非相干光照明。相干光要达到同等的分辨本领，则必须采用倾斜照明。）不过，对于"分辨良好"的像，其空间间隔则必须达到8 μm；而且，甚至在这个相当于125条线/毫米的空间频率上，计算其调制转移函数后表明，光栅图样的对比度仅仅以其原始值的50%再现。

现在来考虑一个小的针孔光源与一个像差校正良好、焦率为F的准直物镜组合起来的问题，以便产生一个"人造星体"。即使针孔的直径小到小于一个波长，用准直仪发出的光测得的表观角也要达到$(1.22\lambda/d)$弧度，这个数值相当于落在准直仪焦平面上的线半径为$(1.22\lambda F)$。所以，采用这样小的针孔已经是十分灵敏了，针孔直径再小，只会损失大量的光能，对方向性却无明显的改进。通常是用某些强光源的聚焦像来照明针孔，这些光源诸如太阳、锆弧、钨卤素灯等。不过，我们不应该忘记，将一个激光光源聚焦到同样大小的针孔上，还能够得到高得多的亮度。

对于诸如探照灯之类的照明问题，那就希望采用发散角远大于衍射极限的光束。在那种情况下，采用激光作光源没有多大意义，采用普通的非相干光源反而更好。

为了描述光束的方向性，可以在光源右侧任意一段合适的距离R上选取一个参考平面。设$V_{最大}$是准直仪所能接收的最大角度，于是，对任何一条离开光源中心的光线而言，可得到一个光线矢量$\begin{bmatrix} RV \\ V \end{bmatrix}$，其中$V$处于$V_{最大}$和$-V_{最大}$之间。可以将这

个光锥中的光线簇都看作是光束的“核心”。

现在来考虑另外一条穿过参考平面的光线，该光线的两个矢量分量分别为 y' 和 V'。那么，从光束核心发出的这条试验光线有多大的“分辨宽度”呢？

为了将这些光线都归回到光源平面上，现在用（负的）平移矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & -R \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 去乘光线矢量 $\begin{bmatrix} y' \\ V' \end{bmatrix}$，以求得表示光源平面半径的 y 值，而刚才选取的试验光线在光源平面上的半径则应当是 $(y'-RV')$。若用衍射极限半径 $(0.61\lambda/V_{最大})$ 去除这个半径，便可得到一个无量纲比 $(y'V_{最大}-RV'V_{最大}/0.61\lambda)$。也可以将它重新写为

$$\frac{1}{0.61\lambda}\det\begin{bmatrix} y' & RV_{最大} \\ V' & V_{最大} \end{bmatrix}$$

这里已将试验光线矢量 $\begin{bmatrix} y' \\ V' \end{bmatrix}$ 与中心光锥中的大量光线取在一起，以形成一个新的 2×2 阶矩阵，其行列式提供了一个揭示这条试验光线是否属于同一簇光线的方法。倘若是同一簇光线，那么，因为两个列矢量都具有相同的 (y/V) 比值，所以其行列式为零。但是，倘若这条试验光线“属于另一个不同的光锥”，其行列式就是一个有限数值，而且，倘若这个数值大大超过 0.61λ，那么这条新的光线应当属于光束核心以外的光线。

认识到这个行列式的数值仅仅与所选择的一对光线有关，而与参考平面的选择无关是很重要的。我们要问，“要用多大的衍射宽度才能使光源平面上这样两条光线相互错开？”现在可以把这个行列式与拉格朗日不变量(Lagrangian invariant)联系起来，并将证明，可以用能量守恒来理解该不变量的不变性。不过，为了证明从一个参考平面到下一个参考平面，拉格朗日不变

量仍保持不变，可以根据这样一个事实，即无论何时，一个幺模光线转移矩阵从$\begin{bmatrix} y_1 & y_1' \\ V_1 & V_1' \end{bmatrix}$变换到$\begin{bmatrix} y_2 & y_2' \\ V_2 & V_2' \end{bmatrix}$，其矩阵元素可以有变化，但它的行列式必须保持不变——若选定的两条光线$\begin{bmatrix} y_1 \\ V_1 \end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix} y_1' \\ V_1' \end{bmatrix}$都属于同一个光锥，则行列式为零；若不属于同一个光锥，则行列式不等于零，并且是一个常数。

若选择两条相互尽可能不同的光线，那么，对任何一个给定的成像系统来说，它的行列式的数值便反映了光线通过该系统传输时，横向可辨别方法的数目。通常的程序是用入射窗口，或系统的视场平面及其入射光瞳来进行运算。(这些术语的定义见附录 A。)我们要选择的两条光线，首先是一条通过视场边缘一个点到达入射光瞳中心的"主光线"，其次是另一条通过视场中心到达入射光瞳边缘一个点的"边缘光线"。

设视场半径为 a_1，并假设半径为 a_2 的入射光瞳位于视场平面右侧为 b 的地方，则与视场平面有关的主光线的光线矢量为$\begin{bmatrix} a_1 \\ -a_1/b \end{bmatrix}$，同一个视场平面的边缘光线的光线矢量则为$\begin{bmatrix} 0 \\ a_2/b \end{bmatrix}$。从这对光线矢量中，得到行列式为

$$\det\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ -a_1/b & a_2/b \end{bmatrix}=a_1a_2/b。$$

和前面一样，用 0.61λ 去除这个行列式，便得到无量纲参数 $(a_1a_2/0.61\,b\lambda)$，它表示即使是一个完全消色差的特殊成像系统，也只有一半线条达到可分辨。

倘若不是用成像的线条，而是用一个间距为$(0.61\,\lambda b/a^2)$的栅格覆盖在整个视场直径上，那就要考虑两维的情况。设视场半径为 a_1，而且将像点的半径取为$(0.3\lambda b/a_2)$，因而，可分辨图

样基元的总数目将是 $\pi a_1^2/\pi(0.3\lambda b/a_2)^2$，或近似为 $\pi^2 a_1^2 a_2^2/b^2\lambda^2$。

这个数目的精确值取决于我们选用哪一种分辨本领或像对比度。不过，上式可以重新写为

$$\frac{1}{\lambda^2}\times(\pi a_1^2)\times(\pi a_2^2/b^2)=\frac{1}{\lambda^2}A\Omega$$

式中，A 表示光束在像平面上所占据的面积，Ω 表示出射光瞳所张开的立体角。

通常称乘积 $A\Omega$ 为拉格朗日不变量。用成像光线转移矩阵 $\begin{bmatrix} m & 0 \\ -1/f & 1/m \end{bmatrix}$ 立刻可得出下述结论：从一个像平面到下一个像平面，拉格朗日不变量保持不变。横向放大率 m 总是角放大率的倒数，因而，当 A 变换到 m^2A 时，新的立体角则变成 Ω/m^2。

对一些被迫在低度照明下工作的光学系统，以及许多诸如光谱仪和单色仪等光学仪器来说，乘积 $A\Omega$ 是重要的，它是一个衡量该光学系统能够接收多少能量，以及能够透过多少能量的有效标准。因为用“拉格朗日不变量”术语表示乘积 $A\Omega$ 可能比较含糊，所以，人们已经找到了更确切的名称，如“光柄”和“容许能力”等，它们都胜过“拉格朗日不变量”这种叫法，目前，康纳斯(Connes)引用的法语名词“空间区域”(étendue)已被广泛采用。

现在假设，用一个亮度均匀的扩展光源照明一个成像系统，扩展光源的“辐射球面”可表示成 S 瓦/厘米^2·球面度。于是，该系统所接收的总辐射功率为 $SA\Omega$ 瓦：若系统的透镜具有理想的透明度，则从一个像平面到下一个像平面，其辐射球面将守恒不变，且所有的辐射功率都传送到输出端。

现在可以看出，若用 λ^2 去除空间区域，就能得到一个无量

纲的数，它描述了一个在衍射极限条件下工作的成像系统所能处理的最大可分辨图象单元数。需要强调指出的是，只有极少数用非相干光照明的光学系统达到了这个分辨本领，而且，使用尽可能大口径的透镜的原因，一般是为了改善像的亮度，并不是为了提高像的分辨本领。不过，在近代天文摄像机中，有时对倾斜像差已达到显著而又完美的校正．所以，其视场容纳的可分辨像可以高达10^8。

但是，随着激光光源的发展，目前已有几种使用相干光照明的光学系统，这些系统的$(A\Omega/\lambda^2)$值都已具有重要的现实意义。例如，在光学信息处理系统中，通常称$(A\Omega/\lambda^2)$为"空间—带宽乘积"，它表示信息处理机能够处理的有效的独立平行通道数。和其他的所有数据都必须进行序列扫描的系统相比，使用光学系统还有一个极大的潜在的优点：这些通道都可以同时工作。

另一个例子是全息照相，或激光斑纹图样照相所用的细颗粒照相胶片。倘若胶片为100 mm 见方，且在一个球面度的整个立体角内接收入射光，那么，即使所有信息都在一个持续几个毫微秒的曝光时间内到达，胶片都能够容易地记录到10^{10}个以上的横向可分辨单元。倘若将同样多的信息通过一个具有10 MHz 视频带宽的电视网路来传送的话，那么，记录所有这些信息所需要的时间至少就需要15分钟。

激光很容易得到非常大的空间—带宽乘积，不过，自相矛盾的是，激光所得到的空间—带宽乘积却与产生激光的激光谐振腔有关，在激光谐振腔中，乘积$(A\Omega/\lambda^2)$受到严重的限制，以致它比1大不了多少。所加的限制是很谨慎的，将谐振腔假定为一个空间滤波器，这样，当激光作用开始时，光波就成为唯一的非常确定的驻波图样，即"单横模"振荡。

在计算光学谐振腔时，实际上常常采用一个前面已考虑过

的参数$(a_1a_2/b\lambda)$来进行运算，并且称这个参数为菲涅耳数 N。于是，二维空间—带宽乘积$(A\Omega/\lambda^2)$在数值上等于(πN)的平方。对一个典型的低功率氦—氖气体激光器而言，腔长 b 为 300 mm，放电管半径 a 为 0.5 mm。因而，在波长为 633 nm 时，菲涅耳数 N 为$(0.5)(0.5)10^6/(300)(633)$，即约为 1.3。

原则上，倘若将放电管看作一个空间滤波器，那么，大约有十二个可分辨的光斑从放电管的一端传输到另一端；而对一台激光振荡器来说，却不希望有这样的输出分布，不过，幸好有一种自然选择过程在起作用，而且只有中心光斑无衍射损耗，从而建立起一个自洽波图样。我们将在本章的后几节考虑这种光波图样的几何结构。

3.4 光学谐振腔的矩阵表示法

上一节已简略地陈述过，一个光学谐振腔的作用是保证当激光振荡时，所产生的光波具有所需要的形状和间距。设计这一类光源的量子电子学工程师，需要考虑下述三个重要问题：

(a) 必须寻找一种适当的激光材料，这样，在该材料的两个容许能级之间就会发生向下受激跃迁，随后提供所希望的波长上的辐射。

(b) 这种材料必须能将它在特殊波长上的吸收光转换成具有适当增益系数的放大光。这一点通常是通过某种“泵浦”来实现的；这种泵浦有选择地供给能量，并通过这种方式产生两个能级之间的“粒子数反转”。

(c) 为了将光反射回到放大介质上，以便得到一台光振荡器，必须应用“光学反馈”，这样就能将同一束光重复地通过放大介质。假设放大介质产生的增益超过谐振腔产生的总损耗，那么，就会从总是存在的固有的自发发射开始而建立起再生过程。

大多数以任何速率连续运转的激光器，它们所产生的驻波图样本身最终将稳定在一个功率水平上，这个功率由能够供给放大介质所需要的泵浦能量的速率确定。

就本章的目的来讲，我们认为，要找到激光材料并解决泵浦问题是不成问题的。假设有一个圆柱形激光放大介质，例如一根玻璃棒或一根气体放电管，它在其整个孔径截面上都产生均匀增益，但不会产生像差或改变放大后波面的形状。虽然这是一种理想的状况，但是，许多低功率气体激光器，以及某些钕玻璃和染料激光器系统都已与这种情况十分接近。

就第三个问题即应用光学反馈而言，在已经处于稳定工作状态下的激光器中，这里忽略了许多可能发生的重要的瞬变效应，而只考虑激光传输。在这种情况下，谐振腔的损耗恰好与放大介质的增益相平衡。另一个我们认为已经解决了的问题是轴向模的选择过程，这种过程精确地选择对光波而言是正确的间距，从而保证当光波在谐振腔内完成一次"往返"时，其相位和前一次往返时的相位相同。现在要考虑的问题是"当光波在谐振腔内传播时，其横向形状会发生什么变化"。

为了回答这个问题，现在必须了解光学谐振腔的几何结构。在绝大多数激光器系统中，光在两个端面反射镜之间向前和向后来回穿行。环形激光器也是这样，在环形激光器中，光要么按顺时针方向，要么按逆时针方向沿着环形路径绕行。不过，这类系统是很少的，可以将这类系统推迟到后面再考虑。

现在来考虑图3·5示意的激光谐振腔。将一个棒长为L的激光放大介质安放在两个端面镜之间，两镜相隔一段距离b，因为激光棒等效于一块平行平板，所以，表示两个反射镜之间间隔的平移矩阵将含有约化厚度：

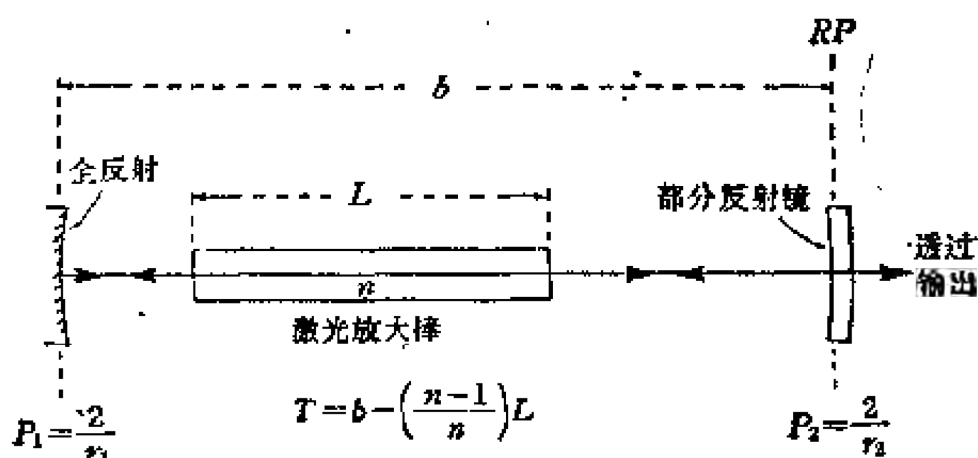


图 3.5

$$T=\frac{(b-L)}{1}+\frac{L}{n}=b-\frac{(n-1)L}{n}$$

式中，n 是激光材料的折射率。

在列出描述该系统的光线转移矩阵之前，将简要说明位于系统右侧的一块部分透射反射镜的作用。因为这块镜子能够使贮存在谐振腔内的光能量按适当比例逸出腔外，作为有效输出供外部使用，所以，通常将它称为"输出反射镜"。要判断一块输出反射镜究竟采用多大反射率才合适，有点象一位种粮食的农夫，为了来年的丰收需要保留刚好足够的种子的问题一样。由于钕激光器能够提供高增益，所以，有时腔内只保留 10% 的能量，而将 90% 的能量耦合到腔外输出；反之，在氦氖激光器系统中，从激光放大介质中得到的增益非常小，因此不能提供 1% 以上的耦合输出。这就是这一类激光器只有在具有高级多层介质反射镜和超净表面条件下，才能振荡的原因。

因为我们对从输出反射镜出射的激光波形感兴趣，所以，比较方便的办法是将参考平面 RP_1 定位在这块镜子的表面上，并将从放大介质出射并沿着 $+z$ 方向到达 RP_1 的原始光线的矩阵考虑为 $\begin{bmatrix} y_1 \\ V_1 \end{bmatrix}$。于是，一部分光被输出反射镜反射回来，并通过

放大介质到达左端反射镜，然后再返回来，再次通过放大介质后，又回到输出反射镜。

倘若现在将第二个参考平面 RP_2 定位于与 RP_1 相重合，那么，可以列出总的光线转移矩阵 M，M 将这“对”参考平面联系起来，并表示通过该谐振腔“一次往返”后的情况。

设 P_1 和 P_2 分别表示两个端面镜的光焦度，则得：

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ V_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P_1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P_2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ V_1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1-P_1T-2P_2T+P_1P_2T^2 & T(2-P_1T) \\ -P_1-P_2+P_1P_2T & 1-P_1T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ V_1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} M \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ V_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ V_1 \end{bmatrix}$$

经验算，该矩阵的行列式等于1，现在必须计算单次通过谐振腔，或者确切地说，多次重复通过谐振腔的作用。

为了表示光线逐次往返通过谐振腔 N 次的作用，必须将总的光线转移矩阵 M 提高到第 N 次幂：根据1.11和1.12节中所描述的矩阵对角化法，就能达到这个目的。可以求出这样一个变换，即

$$M=F\Lambda F^{-1}$$

其中

$$\Lambda=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

是一个对角矩阵，因此

$$M^N=F\Lambda^N F^{-1}$$

为了识别上述两个特征值 λ_1 和 λ_2，可以考虑一个曾经计算过的矩阵的迹 $(A+D)$，得

$$(A+D)=(1-P_1T-2P_2T+P_1P_2T^2)+(1-P_1T)$$
$$=(2-P_1T)(2-P_2T)-2$$

$$=4\left(1-\frac{T}{r_1}\right)\left(1-\frac{T}{r_2}\right)-2$$

和1.11节一样精确地处理，就可以求得 θ 或 t:

或者 $(A+D)=2\cos\theta=4\cos^2(\theta/2)-2$;

于是 $\lambda_1=e^{i\theta},\ \lambda_2=e^{-i\theta}$

或者 $(A+D)=2\cos ht=4\cos h^2(t/2)-2$;

于是 $\lambda_1=e^t,\ \lambda_2=e^{-t}$

否则 $(A+D)=-2\cos h(-t)=-4\sin h^2(-t/2)-2$;

于是 $\lambda_1=-e^t,\ \lambda_2=-e^{-t}$

为了判断应该使用上述三个表达式中的哪一个，必须求出乘积 $(1-T/r_1)(1-T/r_2)$ 究竟等于0和1之间，还是大于这个数值，或是小于这个数值。

正如1.12节所述，若 λ_1 和 λ_2 分别是幺模矩阵 $\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}$ 的两个特征值，则它的两个特征矢量中，有一个矢量具有的分量是比率 $(\lambda_1-D)/C$，另一个矢量具有的分量是比率 $(\lambda_2-D)/C$。

按照目前观点来解释，这些比率就是 y/V 值，或 R 值，通过谐振腔传输时，这些比率不变。倘若具有这种曲率的波面在谐振腔内出现，那么，这个波面本身将会再生。这是一个往后就要讨论到的重要问题。

应该指出，在这种情况下，最好不要采用第一章所描述的对角化方法，而是直接采用 $ABCD$ 法则，就能够得到完全一致的结果。若 R 值在传输中保持不变，则得到两个方程：

$$R_2=\frac{AR_1+B}{CR_1+D}\quad 和\quad R_1=R_2$$

消去 R_2，便得到 R_1 的二次方程：

$$CR_1^2+(D-A)R_1-B=0$$

其解为：

$$R_1=\frac{(A-D)\pm\sqrt{(A-D)^2+4BC}}{2C}$$

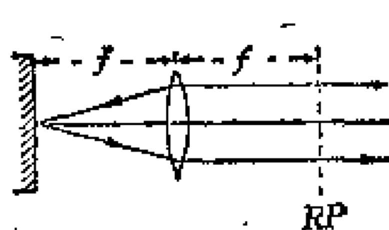
$$=\frac{(A+D\pm\sqrt{(A+D)^2-4})-2D}{2C}$$

不难证明，R 的这两个解都与对角化方法所得到的特征矢量比 $(\lambda_1-D)/C$ 以及 $(\lambda_2-D)/C$ 相一致。

在考虑这些比值的重要性之前，现在来考虑采用另外一些几何结构的谐振腔，这也许是求光线转移矩阵公式所必须的。

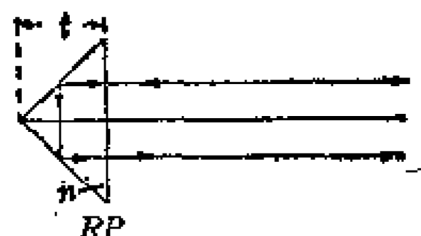
3.4.1 另外一些可供选择的反射器

图3·6说明了两种不同类型的后向反射装置，有时用它们来代替全反射端面镜。请回忆一下，这种反射镜的矩阵是 $\begin{bmatrix}1 & 0\\ -P & 1\end{bmatrix}$，倘若是平面反射镜，它便可简化成一个单位矩阵。



(a) 猫眼后向反射器

$M=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$



(b) 隅角后向反射器

$M=\begin{bmatrix}-1 & \frac{-2t}{n}\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

图 3·6

(a) 为了描述“猫眼”反射镜的工作过程，可以选择一个参考平面，使其与透镜的第一焦平面相重合。若考虑光线数据从这个平面转移到位于第二个焦平面上的平面反射镜上，并再次返回来，则得总矩阵 M 为：

$$M=\begin{bmatrix}0 & f\\ -1/f & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & f\\ -1/f & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

所以，与平面反射镜相反，"猫眼"改变了 y 和 V 这两个数值的符号。$V=n\sin v$ 值的改变是由于 n 的符号改变而引起的，而 n 的符号改变是由于光线返回来的几何方向与其原始方向成180度的缘故。

(b) 众所周知，隅角反射器也恰好具有同样的特性，无论人们怎样小心地使用笛卡儿坐标系统，一条光线的所有三个方向余弦都改变了符号。假设选择一个通过隅角反射器顶点的平面作为参考平面，当在一个与图相垂直的 (x, z) 平面上测量时，对于 (y,V) 值，而且也对于相应的 (x, U) 值，其光线转移矩阵都是 $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$。

倘若将隅角反射器做成玻璃棱镜形状，那就要将有关斜面的作用，即从顶点到斜面所测得的玻璃厚度 t 所起的作用包括在内，与斜面相关所产生的总矩阵 M 为

$$M=\begin{bmatrix}1 & t/n\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & t/n\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -2t/n\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

在采用一个屋脊轴与 (y, z) 平面相垂直的90度屋脊反射器时，(y, V) 值的转移完全可以使用同一个矩阵，不过，在这种情况下，所对应的 (x, U) 值的矩阵是一个普通的平面端面镜的矩阵。因此，必须在各自的基础上分别计算 (x, z) 平面和 (y, z) 平面的矩阵。

3.4.2 弯折型和折迭型光学系统(见图3·7)

为什么一台激光谐振腔的光轴不是笔直地处在两块端面反射镜之间的一条直线呢？有下述几种原因：

(a) 为了避免反射引起的损耗，并且为了保证激光束是线性偏振光，经常将玻璃放大器的端面以及气体放电管的窗口放置成布儒斯特角(Brewster angle)。

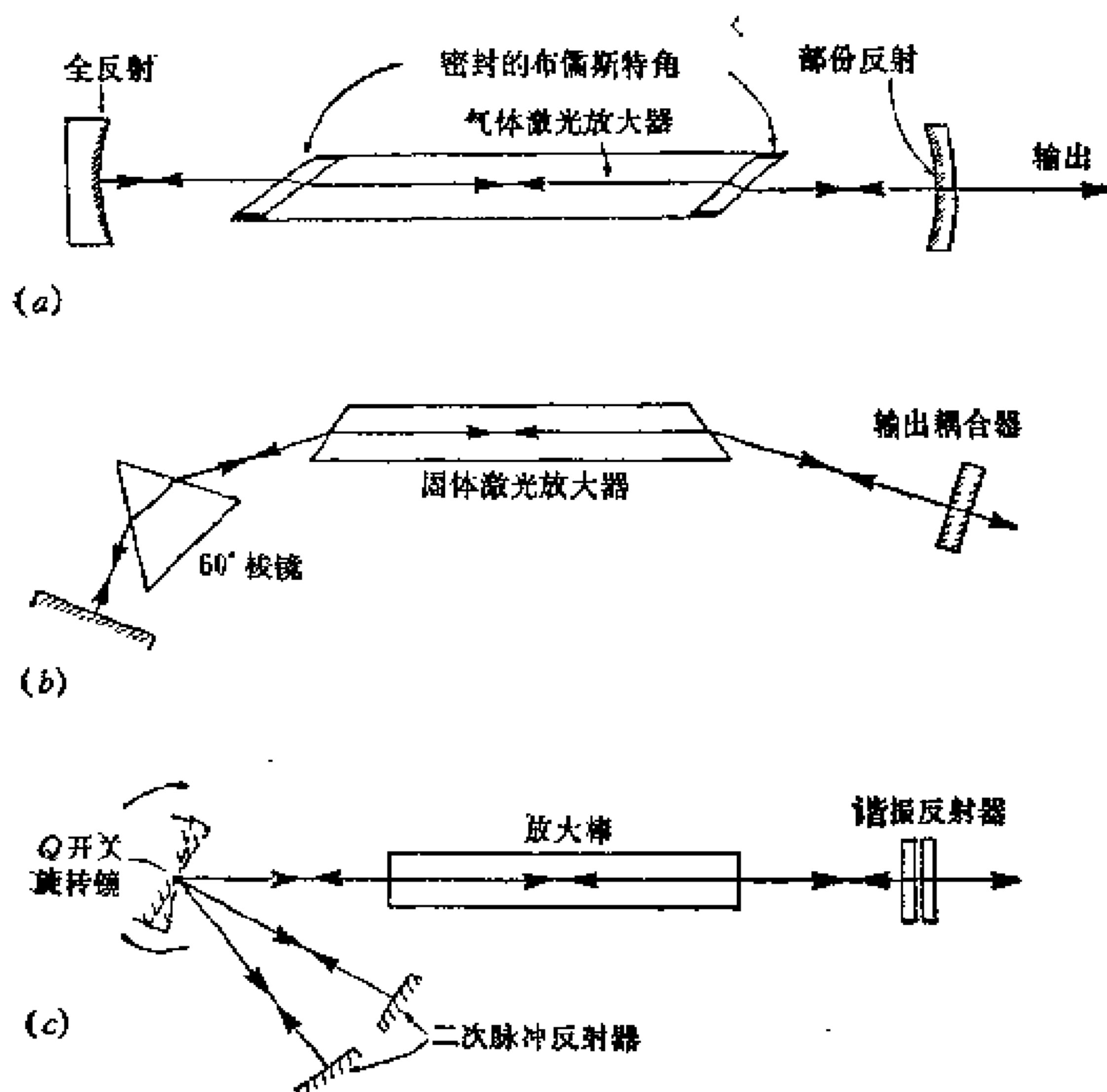


图 3·7

(b) 在利用布儒斯特角的折射时，为了帮助选择正确的激光波长，经常将几个棱镜组合起来使用。

(c) 为了节省空间，通过反射将光路折迭；或为了容纳一个快速旋转棱镜，该棱镜起Q开关作用以产生一个或几个巨脉冲。

(d) 如上所述，利用多次反射和(或)折射可使谐振腔的光轴弯折环行，从而形成一个完整的循环光路。偶尔也将循环光路与隔离器系统安置在一起，以保证光只沿着一个方向循环，这样不会产生驻波图样。不过，在大多数环形激光器中（见图

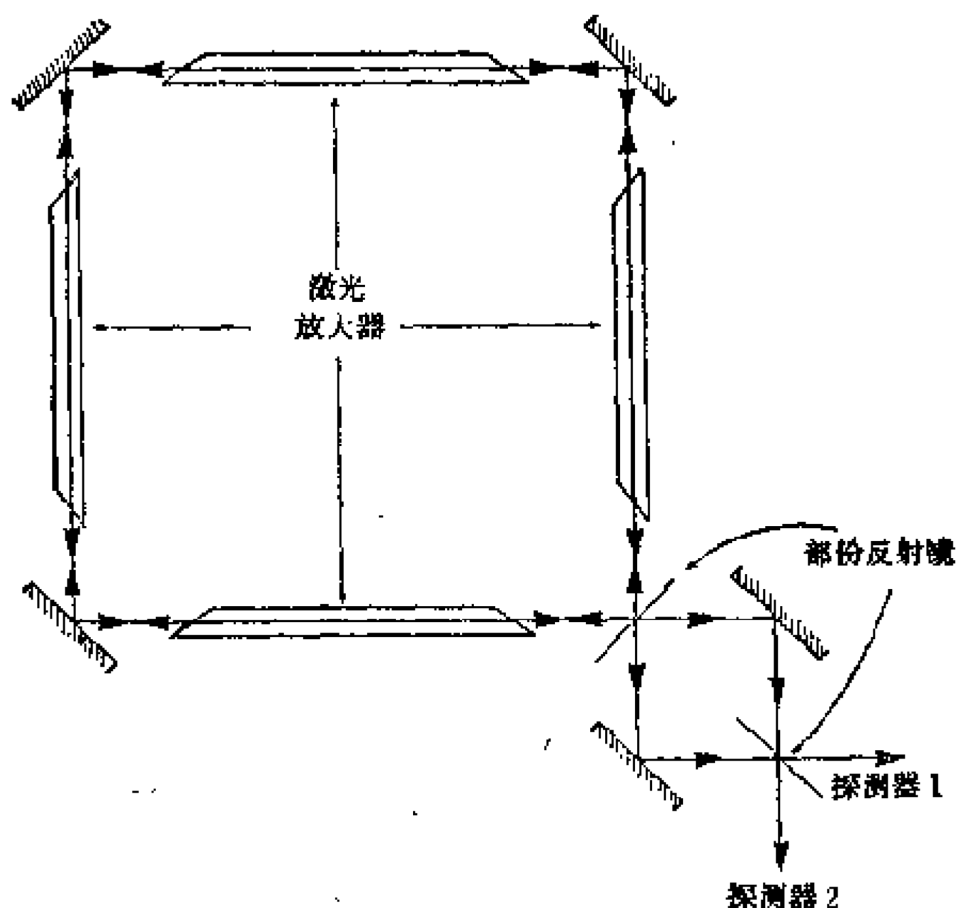


图 3·8

3·8)，两个方向上的循环都可以建立起来，这两个方向上的光频差会产生一个外差的拍频信号，这种外差拍频信号测量了放置谐振腔所用的平台的绝对旋转速率。这个结果就是“激光陀螺”，它的灵敏度非常高，可以用它来替换惯性陀螺。

所有这些系统都必须遵循一条程序，即设想有一条光线先沿着谐振腔的某一段光路的光轴、然后再沿着腔的其余段光路的光轴传播，这时就可以将该光线遇到的所有表示各种约化间隔 T，以及光焦度 P 的一些矩阵适当地插入到该系统的总矩阵中。假如腔内现有的倾斜表面之一是一个曲面，那就会产生像散，所以，影响光线在(y, z)方向上传输的光焦度 P_y，将大于该光线在(x, z)方向上传输的光焦度 P_x。为了描述一条光线在谐振腔内往返一次传输后，(y, V)值和(x, U)值两者是如何变化

的，必须将两个矩阵 M_y 和 M_x 区分开来。

3.4.3 失调的影响

在下述程序中，必须假设谐振腔的所有光学元件都已经定位和定向，它们都具有标准的几何形状。在那种情况下，一条 $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ 光线从谐振腔内某一段光路的光轴发出，在腔内走过一次往返之后，将确确实实地再重复完成同样的光路。不过，在实际上，每个元件的剩余失调都可能引起光线高或光线与轴线的夹角的细小变化，所以，所有这些误差的作用都会产生小的横向变化 Δy 和小的角度变化 ΔV，因此，光线不再重复其原光路传播。

因为处理这些失调要涉及到一个 3×3 阶光线转移增广矩阵的使用，所以将在附录 B 中单独讨论这个问题。不过，可将讨论结果简述如下：

(a) 倘若每一个第 i 个居中参考平面都发生剩余的横向失调和角度失调，那么，计算一对合成值 Δy 和 ΔV 是十分容易的，Δy 和 ΔV 都与光线转移总矩阵有联系，而且完全能表示所有的各种失调情况。

(b) 假设这个矩阵的迹 $(A+D)$ 不等于 $+2$，那就能求得一个新的有效光轴，因而，一条光线将沿着这条新的光轴发出，并且在谐振腔内往返一次之后将确确实实地再沿着相同光路传播。这条新的有效光线的光线高 y_0 和夹角 V_0 由下式给定：

$$y_0=\frac{(1-D)\Delta y+B\Delta V}{(2-A-D)}$$

和

$$V_0=\frac{C\Delta y+(1-A)\Delta V}{(2-A-D)}$$

将这些结果应用于一个简单的由两块反射镜组成的谐振腔（前面已经计算过这种腔的矩阵迹），就会发现，除了腔的几何结

构为

$$\left(1-\frac{T}{r_1}\right)\left(1-\frac{T}{r_2}\right)=1$$

之外，都可以找到一个新的有效光轴。这意味着，或者 $T=r_1+r_2$(两块端面反射镜是共心的)，或者 r_1 和 r_2 都为无穷大(两块端面反射镜都为平面镜的法布里—珀罗型系统)，否则 $T=0$(一种没有放大介质的空腔！)

所有的其它系统，量$(2-A-D)$都不等于零，而且两个端面反射镜的曲率中心在轴向位置上可以相互对换。由此推知，即使两块端面反射镜都与 z 轴不完全一致，但是，它们之间的连线仍落在该光学系统的近轴区域内，从而构成新的有效光轴。倘若有一条有效光轴，即使激光器的研制者都不知道它的位置，但是，通过激光正反馈过程，便能自动地将它找出来。不过，应当记住，倘若两块反射镜失调较大，而且光学系统的空间区域又受到限制，那就会发生光晕，这时，腔内的光遇到光学系统的光阑，谐振腔就会产生额外的能量损耗。

连续运转激光器的优点是避免了$(A+D)=2$，所以，在某种程度上讲，其光轴是自调准的。不过，倘若使用一个旋转棱镜来产生巨脉冲的话，那么，最好是选择一个严格校正过的谐振腔；这样，只有当旋转棱镜扫描通过唯一的光学反馈位置的瞬间，振荡才会发生，这就有助于保证输出脉冲是一个短脉冲。

3.5 稳定和不稳定谐振腔之间的区别

如上一节所述，求出一个表示光学谐振腔几何结构的光线转移矩阵通常是不难的。在算出矩阵迹$(A+D)$之后，便能够求出两个特征值 λ_1 和 λ_2，以及相应的两个特征矢量比$(\lambda_1-D)/C$ 和$(\lambda_2-D)/C$ 的解。

顺便提醒一下，当$(A+D)$的数值介于 $+2$ 和 -2 之间时，光线转移矩阵的两个特征值便分别为 $e^{i\theta}$ 和 $e^{-i\theta}$，即位于同一个圆上的两个复数。为了避免混淆，现在规定 $\pi>\theta>0$。不过，只要 θ 角超出这个范围，两个特征值便为正分枝即 e^{t} 和 e^{-t}，或负分枝即 $-e^{t}$ 和 $-e^{-t}$，它们的实数都不等于 1。如何根据谐振腔内的光传输来解释这些数学上的差别呢？

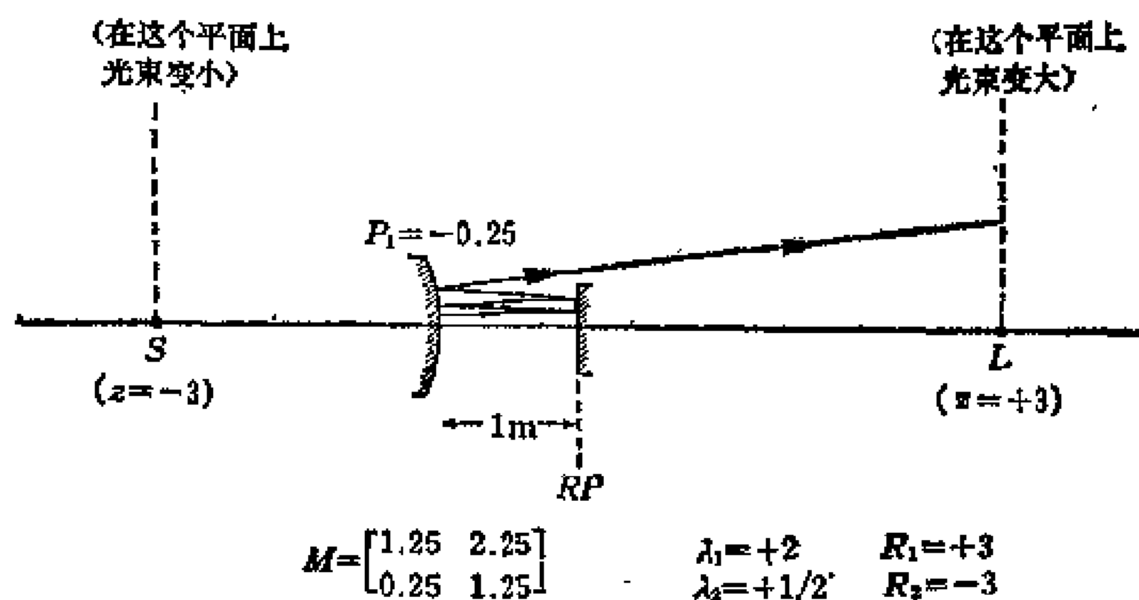


图 3·9

首先考虑一个用具体数字表示的例子。图3·9示意了一个有两块端面反射镜的谐振腔，它由一块略凸的曲率半径为 8 m 的反射镜和一块平面输出镜组成，两镜相距 1 m。利用 3.4 节的往返矩阵，并以米和屈光度为单位进行运算，现在将 $T=1.0$，$P_1=-0.25$ 和 $P_2=0$ 等几个数值代入该矩阵，求得一个从输出反射镜到全反射镜，然后再回到输出反射镜的往返矩阵 M 为

$$M=\begin{bmatrix}1.25 & 2.25\\0.25 & 1.25\end{bmatrix}$$

该矩阵迹$(A+D)=2.5$。为了求出两个特征值，规定 t 为正的实数，并求得 $\lambda_1=2$ 和 $\lambda_2=0.5$。所以，相对应的两个特征矢量

比分别为$(\lambda_1-D)/C=+3$和$(\lambda_2-D)/C=-3$。若用R值来解释的话，则前一个比值表示一个从离输出反射镜左侧为3 m远处的一点发散出来的球面波，后一个比值则表示一个向输出反射镜右侧3 m远处的一点会聚的球面波。

现在来考虑从S点发散出来的光锥内的一条光线，例如光线$\begin{bmatrix}0.03\\0.01\end{bmatrix}$，它与光轴十分靠近。因为这条光线$\begin{bmatrix}0.03\\0.01\end{bmatrix}$是矩阵$M$的特征矢量之一，所以可以发现，在腔内一次往返以后，它就变成

$$\begin{bmatrix}0.03\lambda_1\\0.01\lambda_1\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}0.03\\0.01\end{bmatrix},$$

这是因为2是相关的特征值。新的光线$2\begin{bmatrix}0.03\\0.01\end{bmatrix}$仍属于同一个光锥，但是它离光轴的距离是原先距离的二倍。当它在谐振腔内经过n次往返穿越后，离轴的距离将是原先距离的2^n倍，并且它最终会遇上该系统的其中一个光阑。

为了更清楚地了解所发生的情况，可以将这个矩阵转换到一"对"新的参考平面上，这两个参考平面都重合定位在S点上，光锥就是从S点上发散出来的。用适当的$\mathscr{T}$矩阵分别左乘和右乘该系统的往返矩阵M，得到：

$$\begin{bmatrix}1&-3\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1.25&2.25\\0.25&1.25\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-3\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1.25&6\\0.25&2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.5&0\\0.25&2\end{bmatrix}$$

因为右上角元素为零，所以这个新矩阵表示一个成像关系。每横越一次谐振腔，不管S平面上存在什么样的分布，y值都将缩小2倍，而V值则扩大2倍(或者，在一般情况下，$\lambda_1=e^t$)。

反之，倘若对一个含有L的参考平面进行相应的计算，就能求得一个矩阵$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0.25 & 0.5 \end{bmatrix}$，它表示相反的作用，即在这个平面上，$y$值扩大而$V$值却缩小。

所以，在几何光学基础上，最初向光学系统发出的光束，不管其形状如何（例如自发辐射），由于光束向后和向前来回穿行的作用，都会使光束横截面在S平面上收缩成一个非常小的中心区域，而在L平面上则扩大为非常大的中心区域。最后，L平面上的光阑会限制光束的这种扩展，而S平面上的情形却相反，光束继续收缩，直到光束达到衍射极限为止，衍射极限由最大V值确定，最大V值系指该系统按无障碍处理时的V值。

激光器设计者经常采用一种其中央部分为全反射的输出反射镜，来代替部分透过的输出反射镜，这样，输出光束便是径向扩大的环形光束，当光束最后一次通过谐振腔时，便从输出反射镜的四周漏逸出去（见图3·9）。尽管这种光束略微发散，但它的方向性却能达到衍射极限，所以，利用一个外部系统就可以将光束准直，或者再次聚焦成一个小的点。

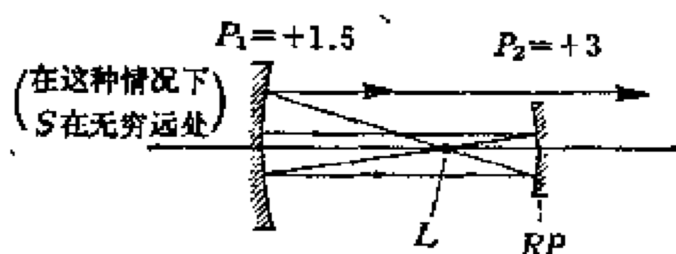
上述谐振腔具有固有的损耗，通常将这种腔称为“不稳定”腔。从某些意义上讲，“不稳定”腔的术语就是“失调”，因为波面的形状是在平滑地会聚传输，并迅速地达到特征矢量所规定的自重复R值；而且，每经过一次往返过程，都会发生有关光锥的径向扩展，每一条光线都有累积逸散，直到光束脱离该系统。由于光束在x和y两个方向上都是径向扩展的，而在谐振腔内每渡越一次，回到输出反射镜中央区域的能量将减弱四倍，所以，为了建立或维持激光振荡，必须保证激光放大的双程增益至少为四倍（或者，在一般情况下$\lambda_1^2=e^{2t}$）。

由于要求激光放大器具有高增益，所以最初激光器设计者

并不赞成采用不稳定型的谐振腔。不稳定腔的一个很大的优点是，即使是建成一个菲涅耳数非常大的大尺寸谐振腔，光束输出的方向性也很好，而且对调准的要求也不高。在未来的高功率工业激光系统的设计中，各种形式的不稳定谐振腔很可能会占据主要地位。工作在红外 10.6 μm 波长的二氧化碳激光器，其外部光学元件采用反射镜就比采用透镜好，所以，环形输出光束中的间隔并不是一个缺点。

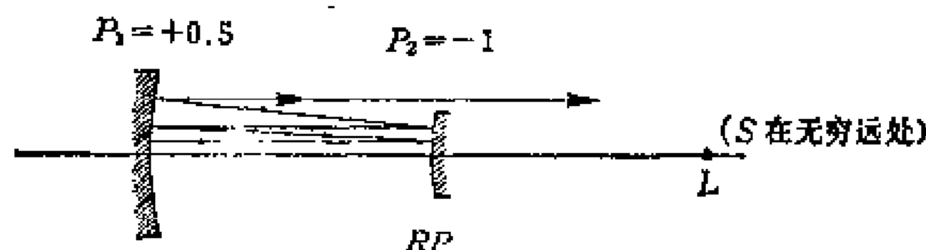
不稳定谐振腔还可以有其他几种形式，将它们设计成准直输出是不难的。图 3·10 示意了其中的两种系统，在这两种系统中，都将一对反射镜安置成一个放大率不等于 1 的无焦系统。

图 3·10a 示意了两块凹面反射镜，并具有参数 $P_1=+1.5$，$P_2=+3$ 和 $T=1$，因而，$M=\begin{bmatrix}-2 & 0.5\\ 0 & -0.5\end{bmatrix}$。这个矩阵迹为



(a)

$$M=\begin{bmatrix}-2.0 & 0.5\\ 0 & -0.5\end{bmatrix} \quad \lambda_1=-2 \quad R_1=\infty$$
$$\lambda_2=-1/2 \quad R_2=1/3$$



$$M=\begin{bmatrix}2.0 & 1.5\\ 0 & 0.5\end{bmatrix} \quad \lambda_1=2 \quad R_1=\infty$$
$$\lambda_2=1/2 \quad R_2=-1$$

(b)

图 3·10

-2.5，显然，它的两个特征值分别为 $\lambda_1=-2$ 和 $\lambda_2=-0.5$。因为在这个无焦系统中，C 为零，所以，第一个特征矢量比 $(\lambda_1-D)/C$ 显然为无穷大。第二个特征矢量比 $(\lambda_2-D)/C$ 是一个不确定的数值，不过，另一个表达式 $B/(\lambda_2-A)$（见1.12.1节）是第二个可能的 R 值的1/3。两个重复地成像在自身位置上的平面，分别是一个位于无穷远处的平面和另一个两块反射镜的公共焦点所通过的平面。随着光束接连不断地在腔内往返传播，光束横截面继续扩展直到后来填满，并在无穷远处的平面上收缩成达到衍射极限的光斑。激光振荡所需的增益和上一个例子相同。

这种以任何重复率运转的高功率系统都存在一个严重的缺点：无论什么时候只要光辐射沿着 $-z$ 方向传播，总会使光束聚焦到腔内的 L 点上，造成在这个区域内功率高度集中，这样几乎肯定会由于电介质的击穿而产生等离子体。所以，最好采用图3·10b 所示的具有正的放大率的望远镜系统。在这种情况下，$P_1=+0.5$，$P_2=-1$ 和 $T=1$。因此，矩阵

$$M=\begin{bmatrix}2.0 & 1.5\\ 0 & 0.5\end{bmatrix},$$

其矩阵迹 $(A+D)$ 和第一个例子中的相同，其值为2.5。表示输出的主 R 值为

$$\frac{\lambda_1-D}{C}=\frac{2-0.5}{0}=\infty$$

另一个特征矢量比为

$$\frac{B}{\lambda_2-A}=\frac{1.5}{0.5-2.0}=-1$$

所以，L 平面位于距输出反射镜右侧1 m处，实际上它位于两个反射镜的公共焦点上。至于沿 $+z$ 方向传播的输出光束，它将

在无穷远处的 S 平面上集中成一个达到衍射极限的光斑，而在 L 平面上，光束的横截面将变得和光学系统所容许的光阑一样大。

迄今已经考虑过的所有例子都是一个具有固有损耗的谐振腔即不稳定腔；其主特征值 e^t 表示横向放大率(和所需要的往返增益的平方根)，而实特征矢量 $(e^t-D)/C$ 或者是 $B/(e^t-A)$ 则预示了谐振腔产生的波面的几何曲率半径。

现在来考虑稳定谐振腔的几何结构。增益系数非常低的低功率氦氖气体激光器就采用这种稳定腔。图 3·11 示意了其中的两个例子。

图 3·11a 的谐振腔使用了两块凹面反射镜，其曲率半径皆为 10 m，两镜相距 34 cm。以米和屈光度(取三位小数)为单位进行运算，得 $P_1=P_2=+0.200$ 和 $T=0.340$。于是，算得

$P_1=0.2$ $P_2=0.2$

$T=0.34$

(10m 半径) (10m 半径)

$$M=\begin{bmatrix}0.800 & 0.657\\ 0.386 & 0.932\end{bmatrix}\qquad \lambda=0.866\pm0.500\,i$$

$$\left(\frac{\lambda-D}{C}\right)=0.171\pm0.129\,i$$

(a)

$P_1=1$ $P_2=0$

$T=1.0$

RP

$$M=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\qquad \lambda=\pm i\qquad \frac{\lambda-D}{C}=\pm i$$

(b)

图 3·11

$$M=\begin{bmatrix}0.800 & 0.657\\ -0.386 & 0.932\end{bmatrix}$$

和矩阵迹 $(A+D)=1.732=2\cos\theta$（显然，在这种情况下 $\theta=30°$）。因为 θ 角被限制在 0° 到 180° 范围内，所以两个特征值为 $e^{\pm i\theta}=\cos\theta\pm i\sin\theta=0.866\pm0.500i$，两个特征矢量比(复数)为

$$\frac{0.866\pm0.500i-0.932}{-0.386}=0.171\pm1.295i$$

在特定结构的稳定腔中，选择角 θ 恰好等于 30° 即 $\pi/6$ rad。所以，立即可以得到一个结果：倘若在这个谐振腔内光线经过十二次完整的往返传输，则总的转移矩阵将简化为单位矩阵。用 1.11 节中的 F 来表示一个对角化矩阵，得

$$M^{12}=F\Lambda^{12}F^{-1}=FIF^{-1}=I$$

其中
$$\Lambda^{12}=\begin{bmatrix}e^{12i\theta} & 0\\ 0 & e^{-12i\theta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

由此可以推断，不管近轴光线在谐振腔内如何开始发射，只要光线在这个腔内完成十二次往返传输以后，光线都会沿着其原始轨迹重复传播下去。所以，在某种意义上讲，现在已经得到一个稳定的谐振腔，这类腔不允许光线从光轴上逸出，也不会造成本身损耗。

就目前所看到的情况而言，并不需要将谐振腔设计成精确地符合某个特定的 θ 角，从无"逸散"造成的损耗这一点来讲，θ 角为任何值时都可以稳定地振荡。不过，图 3·11b 所示的第二个例子，也许会有助于强调解释这些复特征矢量比的必要性。它表示了一个理想的"半共焦"稳定腔，在这种腔中，$P_1=1$，$P_2=0$ 和 $T=1$。于是，求得 $M=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ 和 $(A+D)=0=2\cos\theta$

(显然，在这种情况下 $\theta=90°$)。因此，两个特征值为 $e^{\pm i\pi}=\pm i$，两个特征矢量比为 $(\pm i-0)/-1=\mp i$（全部为虚数）。不难证明，该矩阵的 $M^2=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ 和 $M^4=I$。当近轴光线两次通过这个半共焦腔时，就等效于众所周知的共焦腔；而在四次通过半共焦腔时，则每条近轴光线都重复其原始的轨迹。

下几节将会看到，对激光器设计者来说，一个重要的参数是复特征矢量比而不是真正的特征值。但是，为了完整起见，现在给出一个公式，它使我们能够计算出光线在任何稳定腔中经过 n 次往返以后所受的影响。

若 M 是一个幺模矩阵，它的两个特征值为 $e^{\pm i\theta}$，则

$$M^n=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}^n$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{\sin(n+1)\theta-D\sin n\theta}{\sin\theta} & \dfrac{B\sin n\theta}{\sin\theta}\\ \dfrac{C\sin n\theta}{\sin\theta} & \dfrac{D\sin n\theta-\sin(n-1)\theta}{\sin\theta}\end{bmatrix}$$

这个结果被称为西勒维斯特定理(Sylvester's theorem)，它对 θ 角为任何数值以及 n 为任何整数都适用。(倘若用一个相应的 t 的双曲线函数代替 θ 的三角函数，那就可以得到同样的结果，也适用于光线在稳定腔内经过 n 次往返后的情况。)

那些需要学习和掌握棣马佛定理(de Moivre's theorem)的学生自己可以练习证明，从1.12节讨论的对角化程序中就能直接推导出上述定理：

$$M^n=F\Lambda^nF^{-1}$$

$$=\frac{\begin{bmatrix}e^{i\theta}-D & e^{-i\theta}-D\\ C & C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{ni\theta} & 0\\ 0 & e^{-ni\theta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C & D-e^{-i\theta}\\ -C & e^{i\theta}-D\end{bmatrix}}{2iC\sin\theta}$$

这些学生还要验算如下几点：

(a) 倘若将 $n=1$ 代入西勒维斯特公式，那么，因为

$$(2\cos\theta)=(A+D),$$

因此就得到所需要的

$$M=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}。$$

(b) 倘若将 $n=-1$ 代入西勒维斯特公式，则得到逆矩阵

$$M^{-1}=\begin{bmatrix} D & -B \\ -C & A \end{bmatrix}。$$

(c) 若 $n\theta$ 是 2π 的整数倍，那么，便得到单位矩阵。

3.6 高斯光束的传输及其复曲率参数

在讨论稳定谐振腔时，需要引进一个“高斯光束”的概念。这是一个用于描述相干辐射的衍射极限光束的术语，高斯光束的能量仍然集中在传输光轴的附近，并且按照平滑的高斯函数迅速地下降。实际上，这种光束与衍射所容许的单根光线或一个近轴光线锥最为接近；可以发现，高斯仅仅在数学上推导得到的这个概念，由于科学上的进展，目前正在使“高斯光学”的概念日趋完美和丰富。

戈盖尔尼克和其他学者都指出，可以从波动方程中容易地推导出高斯光束在自由空间中如何传输的细节。在靠近光轴的地方，一个“高斯基模”的振幅分布 $A(r, z)$ 由下式描述

$$A(r,\ z)=A_0\left(\frac{w_0}{w}\right)\exp\left[i\left(\frac{2\pi z}{\lambda}+\phi\right)-r^2\left(\frac{1}{w^2}-\frac{2\pi i}{2\lambda R}\right)\right]$$

式中，$2\pi z/\lambda$ 项描述了沿着传输光轴所发生的相位变化；ϕ 项表示一个很小的附加的相位变化，它与 z 的关系由下式给出：

$$\tan\phi=\left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2}\right)$$

(注意，这里所用的 λ 表示光的波长，不是特征值。)

r^2 的系数包含有一个实分量和一个虚分量，这两个分量对本章都是十分重要的。实分量 $1/w^2$ 表示在径向方向上，振幅模数按高斯函数 $\exp(-r^2/w^2)$ 而变化。因此，半径 w 是一个"光斑半径"，在光斑半径上光的振幅下降到 $1/e$，且辐照度(或强度)为其中心值的 $1/e^2$。虚分量 $-2\pi i/2\lambda R$ 描述了波场相位与半径成二次方关系，R 项通常表示等相位面的曲率半径，等相位面就是沿着 $+z$ 轴方向传播的波面。

当高斯光束在空间传输时，衍射效应会引起光束缓慢地扩展和发散，因而，光斑半径 w 和曲率半径 R 也都随 z 坐标而缓慢地变化。从波动方程中推导得到的、决定这两个参数的两条定律分别为：

$$w(z)^2=w_0^2\left[1+\left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2}\right)^2\right]$$

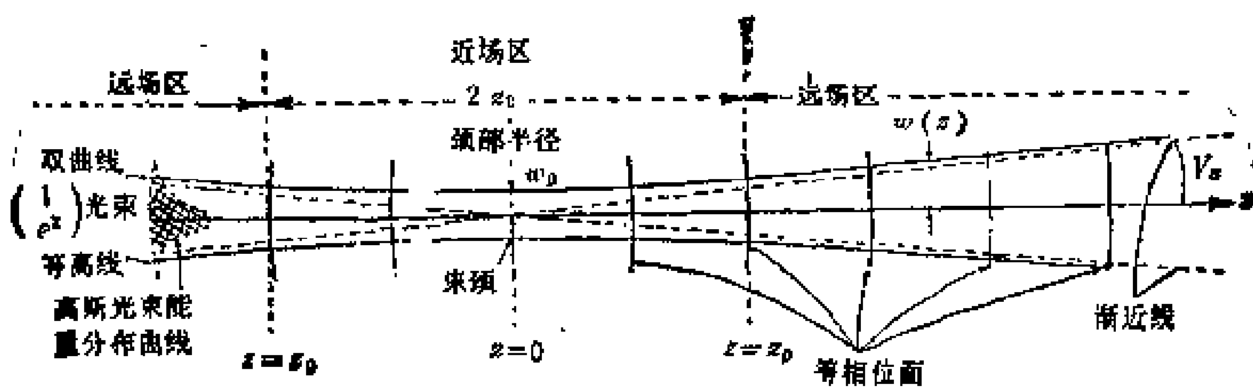
和

$$R(z)=z\left[1+\left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda z}\right)^2\right]$$

图 3·12 示意了画在 yz 平面内这些参数的特性。从图中可以看出，表示 $1/e^2$ 半径的曲线是一条双曲线，最靠近 z 轴的是位于 $z=0$ 处的 w_0，其渐近线与 z 轴成一夹角 V_s，$V_s=\pm(\lambda/\pi w_0)$。

等相位面就是这些靠近高斯光束"颈部"处的平面，在与中心相距 $\pm z_0=\pm\pi w_0^2/\lambda$ 的地方，它们具有最大的曲率。在长度为 $2z_0$ 的中心区域，光束横截面几乎保持不变，有时将它们称为"近场"，而发散的渐近线区域则称为"远场"。

第一项 w_0/w 表示靠近光束颈部或焦点处的电场强度大于光束已扩展了的远场区的电场强度。但是，对所有的 z 值，光束



记号	含义	方程
$w(z)$	$\left(\frac{1}{e^2}\right)$处的光束半径	$w(z)=w_0\left[1+\left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$
$R(z)$	等相位面的曲率半径	$R(z)=z\left[1+\left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda z}\right)^2\right]$
$q(z)$	复曲率参数	$\frac{1}{q(z)}=\frac{1}{R(z)}+\frac{i\lambda}{\pi[w(z)]^2}$
z_0	共焦光束参数	$z_0=\frac{\pi w_0^2}{\lambda}$
V_θ	发散光束的渐近角	$V_\theta=\pm\left(\frac{\lambda}{\pi w_0}\right)$

图 3·12

的总能量都保持不变(假设无任何吸收介质或放大介质)；有86% 的能量保持在 $1/e^2$ 轮廓线以内。

虽然上面给出的公式可能是麻烦的，但是，前面给出的两个有关光斑半径 $w(z)$ 和曲率半径 $R(z)$ 的方程，使我们能够计算出高斯光束如何在自由空间中传输或渡越一个间隔。很显然，若高斯光束通过一个会聚本领为 P 的薄透镜或曲面时，它的光斑半径不变，但其发散度($1/R$)则变为($1/R$) - P。

倘若将这两个光束参数合并成单个"复曲率参数"$q(z)$，那就会得到一个保持这两个参数的轨迹的精巧方法。在振幅表达式中，不是将系数 r^2 写成$(1/w^2)-(2\pi i/2\lambda R)$，而是简单的写为 $-2\pi i/2\lambda q$，可将式中的 q 理解为复数。

从这个定义出发，立即得到：

$$\frac{1}{q}=\frac{1}{R}+\frac{i\lambda}{\pi w^2}$$

$1/q$ 的实部表示等相位面的发散度，而虚部是 $1/w^2$ 的一个尺度，即它是衡量光束在轴向区域内集中本领的尺度。

将已得到的 $1/q$ 表达式代入原先的 $R(z)$ 与 $w(z)$ 表示式，不难证明，光束在自由空间中的传输为 $q(z)=q_0+z$，其中 $q_0=(i\lambda/\pi w_0^2)^{-1}$ 是在光束颈部处($z=0$)所得到的 q 值。所以，当光束渡越一个宽度为 T 的间隔时，可以得到 $q_2=q_1+T$，q 值恰如一个实数 R 值一样。

当光束通过一个会聚本领为 P 的薄透镜或曲面折射时，可以得到四个方程。前两个方程分别定义为

$$\frac{1}{q_2}=\frac{1}{R_2}+\frac{i\lambda}{\pi w_2^2}$$

和

$$\frac{1}{q_1}=\frac{1}{R_1}+\frac{i\lambda}{\pi w_1^2}$$

第三个方程是 $1/R_2=1/R_1-P$，它表示光束发散度的变化，最后一个方程是 $w_2=w_1$，它表示光斑半径保持不变。联立这四个方程，得到 $1/q_2=1/q_1-P$，因此，这个再一次将复 q 值变换而得到的方程，与实数 R 值的方程刚好相同。

虽然上述方程与我们曾经引用过但未证明的公式有关，但是，利用 $\mathscr{T}$ 矩阵或 $\mathscr{R}$ 矩阵，或者是它们的任何组合矩阵，就能将复曲率参数 q 变换成和实数 R 值的表示式一模一样。而且，若已经算出了一个表示完整的光学系统的总矩阵，则用 $ABCD$ 法则便能得到：

$$q_2=\frac{Aq_1+B}{Cq_1+D}$$

q_2 便是复曲率参数的输出值。

3.7 节将证明，假定一个稳定谐振腔具有合适的孔径和足够的激光放大，那么，可以将得到的迄今仍令人费解的腔的复特征矢量比，看作是该稳定腔产生的基本高斯光束的 q 值。

3.6.1 有关高斯光束的 $ABCD$ 法则证明

在证明这一点之前，先采用 3.2 节所讨论的衍射公式来证明，若 q_1 表示在 RP_1 平面上出现的高斯光束，则在 RP_2 平面上的输出便是另一个高斯光束，它由 q_2 表示，即

$$q_2=\frac{Aq_1+B}{Cq_1+D}$$

从一般的一维衍射公式出发

$$A_2(y_2)=\left(\frac{-i}{\lambda B}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}A_1(y_1)\exp\left[\frac{2\pi i}{\lambda}W(y_1,\ y_2)\right]dy_1$$

将高斯振幅 $\qquad A_1(y_1)=\exp\left[\dfrac{2\pi i y_1^2}{2\lambda q_1}\right]$

和程函公式 $\qquad W(y_1,\ y_2)=\left(\dfrac{Ay_1^2+Dy_2^2-2y_1y_2}{2B}\right)$

都代入衍射公式，于是得到

$$\begin{aligned}A_2(y_2)&=\left(\frac{-i}{\lambda B}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[\frac{2\pi i}{2q_1}\left(\frac{y_1^2}{2q_1}+\frac{Ay_1^2}{2B}\right.\right.\\&\qquad\left.\left.-\frac{2y_1y_2}{2B}+\frac{Dy_2^2}{2B}\right)\right]dy_1\\&=\left(\frac{-i}{\lambda B}\right)^{1/2}\exp\left[\frac{2\pi iDy_2^2}{2\lambda B}\right]\\&\qquad\times\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[y_1^2\left(\frac{\pi i}{\lambda q_1}+\frac{\pi iA}{\lambda B}\right)-y_1\left(\frac{2\pi iy_2}{\lambda B}\right)\right]dy_1\end{aligned}$$

为了计算这个积分，可以将下述两式代入，

$$v=-\frac{y_2}{\lambda B}\quad 和\quad \frac{i}{\lambda q_1}+\frac{iA}{\lambda B}=-\frac{1}{s^2}$$

于是，这个积分便变成

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\frac{\pi y_1^2}{s^2}\right]\exp[2\pi iy_1v]dy_1$$

这就是众所周知的傅里叶变换式(Fourier transform)，其值为 $[s\exp(-\pi v^2s^2)]$。将它再代回到 A_2 的表示式，得到

$$A_2(y_2)=\left(\frac{-i}{\lambda B}\right)^{1/2}\exp\left[\frac{2\pi i D y_2^2}{2\lambda B}\right]\left[\frac{1}{(i/\lambda q_1+iA/\lambda B)}\right]^{1/2}$$

$$\times\exp\left[\frac{-\pi y_2^2}{\lambda^2 B^2}\frac{(1)}{(i/\lambda q_1+iA/\lambda B)}\right]$$

$$=\left[\frac{q_1}{Aq_1+B}\right]^{1/2}\exp\left[\frac{2\pi i D y_2^2}{2\lambda B}\right]$$

$$\times\exp\left[\frac{-\pi y_2^2 i\lambda B q_1}{\lambda^2 B^2(Aq_1+B)}\right]$$

$$=\left[\frac{q_1}{Aq_1+B}\right]^{1/2}\exp\left[\frac{\pi i y_2^2}{\lambda B}\left(D-\frac{q_1}{Aq_1+B}\right)\right]$$

重新加以整理

$$\left(D-\frac{q_1}{(Aq_1+B)}\right)\text{为}\ \frac{ADq_1+BD-q_1}{Aq_1+B}\ \text{或}\ \frac{B(Cq_1+D)}{(Aq_1+B)}$$

最后得到

$$A_2(y_2)=\left[\frac{q_1}{Aq_1+B}\right]^{1/2}\exp\left[\frac{2\pi i y_2^2}{\lambda}\ \frac{(Cq_1+D)}{2(Aq_1+B)}\right]$$

3.8 节将证明，可以将指数项的前面所出现的复量 $[q_1/(Aq_1+B)]^{1/2}$ 重新表示为 $[(w_1/w_2)\exp(i\phi_{12})]^{1/2}$，其中 w_2 是光束的实光斑半径，ϕ_{12} 是两个参考平面之间所产生的实相位变化。（当然这里也存在一个由常数项 $\int_{z_1}^{z_2} n dz$ 所产生的相当大的整个光束的相位变化，但我们已从程函公式中省略了这个常数项。）

现在将注意力回到方括弧中的指数上来，并证明这个指数与表现高斯光束的 y_2 值有二次方的依赖关系。将指数项看作是 $[(2\pi i/\lambda)(y_2^2/2q_2)]$ 时，就可以证明，高斯光束在输出平面上的复曲率参数 q_2 确实由下式给定

$$q_2=\frac{Aq_1+B}{Cq_1+D}$$

上述计算是在一维基础上进行的，它对柱面波是有效的。也可以很方便地将表示球面波振幅的任何高斯函数，都当作是两个分立的一维波函数的乘积。

因此，若用 $A_2(y_2)$ 乘以相对应的 x 方向上的表达式，则得到球面波

$$
\begin{aligned}
A_2(r_2) &= A_2(x_2)A_2(y_2) \\
&= \left[\frac{q_1}{Aq_1+B}\right]\exp\frac{2\pi i}{\lambda}\left[\frac{x_2^2+y_2^2}{2q_2}\right] \\
&= \left(\frac{w_1}{w_2}\right)\exp\left[i\phi_{12}+\frac{2\pi i}{\lambda}\left(\frac{r_2^2}{2q_2}\right]\right.
\end{aligned}
$$

式中，w_1 和 w_2 分别为两个光斑半径，以及

$$
q_2=\left(\frac{Aq_1+B}{Cq_1+D}\right)
$$

q_2 是输出参考平面上的 q 值。

3.7 预言激光振荡器的输出

倘若使一个稳定腔在基模上振荡，那就会产生高斯光束，现在来解释，为什么稳定腔中的复特征矢量比就是表示高斯光束几何结构的 q 值。

根据 3.5 节的计算结果，若 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ 是谐振腔的矩阵，并且倘若 $\exp(\pm i\theta)$ 是该矩阵的两个特征值的话，那么，光在腔内经过一次往返后，其 q 值保持不变，并且它由方程

$$
q=\frac{\exp(\pm i\theta)-D}{C}
$$

或另一个方程

$$
q=\frac{B}{\exp(\pm i\theta)-A}
$$

给出，其中 $\pi>\theta>0$。将第二个方程取倒数，并记住 $\cos\theta=(A+D)/2$，得

$$\frac{1}{q}=\frac{\exp(\pm i\theta)-A}{B}=\frac{\cos\theta-A}{B}\pm\frac{i\sin\theta}{B}$$

$$=\frac{(D-A)}{2B}\pm\frac{i\sin\theta}{B}$$

但是，根据前面定义的方程，必须有

$$\frac{1}{q}=\frac{1}{R}+\frac{i\lambda}{\pi w^2}$$

将实部与虚部区分开，于是得

$$\frac{1}{R}=\frac{D-A}{2B}$$

以及

$$\frac{\lambda}{\pi w^2}=\frac{\pm\sin\theta}{B}$$

正负号视所用的特征值而定。

可以证明，第二个特征值所产生的 w^2 的负值对应于一种不可能的情况，即光束偏离中心时，其能量反而大大增加。所以，舍去这个解，只保留第一个特征值 $\lambda_1=\exp(+i\theta)$，便得到"基本的"高斯光束，其光斑半径由 $w=(\lambda B/\pi\sin\theta)^{1/2}$ 给定，其等相位面的曲率半径由 $R=2B/(D-A)$给出。当然，上面出现的 $\sin\theta$ 可以直接从矩阵元素中计算得到：

$$\sin\theta=\left[1-\left(\frac{A+D}{2}\right)^2\right]^{1/2}$$

作为表示高斯光束特性的另一种方法，可以将 q 的方程分解成实分量和虚分量两部分，于是有

$$q=\frac{\exp(+i\theta)-D}{C}=\frac{A-D}{2C}+\frac{i\sin\theta}{C}$$

另一方面，如上一节所述，若 $q_0=-i\pi w_0^2/\lambda$ 表示在高斯光束颈部处测得的 q 值，则在与其颈部右侧相距为 z 的参考平面上，得

（对一个间隔 z 则可采用 $ABCD$ 法则）

$$q=z+q_0=z-\frac{i\pi w_0^2}{\lambda}$$

将一个输出参考平面上 q 值的两个方程作比较，便得出下面的结论，即光束的颈部位于与该参考平面左侧相距为 $(A-D)/2C$ 的地方，这里可以得到最小的光斑半径，其值为

$$w_0=\left(\frac{-\lambda\sin\theta}{\pi C}\right)^{1/2}$$

有时将距离 $\pi w_0^2/\lambda$ 称为共焦光束参数 z_0，它由下式给定

$$z_0=\frac{-\sin\theta}{C}$$

我们将刚才讨论的关系式与不稳定腔所得到的关系式逐一比较，并归纳在表 2 中。但是，在考虑应用这些例子之前，需要小心推敲模式鉴别的问题。

首先，除非将稳定谐振腔做成具有相当小的孔径，使得菲涅耳数比 1 大不了多少，否则，腔的边缘衍射所造成的能量损耗将会非常小，这样，当激光器具有增益时，就不能保证只在中心区产生高斯光束。的确，在某些气体激光器中，激光管管壁区由放电所产生的增益略高于管中心区的增益，所以，管壁区实际上可能更容易产生高阶横模。

其次，数学家也许会反对这样一种说法：即倘若菲涅耳数足够小，使得光束在腔内每次往返都产生相当可观的能量损耗，这时就应该用“长椭球函数”来描述这些模式。但是，在实际上，对于较高阶的模来说，用适当阶数的多项式（在矩形孔径情况下，采用厄密多项式（Hermite polynominal）；圆形孔径情况下则采用拉盖尔多项式（Laguerre polynominal）。）去乘高斯函数，所得结果仍可相当近似地表示成高斯函数的振幅分布。假定能正确地定标这些多项式，那么，仍能用 $ABCD$ 法则来变换表示

表 2　谐振腔的矩阵与其光学特性之间的关系

令往返一次的矩阵为$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$，其中$(AD-BC)=1$，且所有的元素均为实数。

不稳定谐振腔	所考虑的特性	稳定谐振腔
若 $\frac{(A+D)}{2}>1$， 则是不稳定谐振腔(正分枝) 若 $\frac{(A+D)}{2}<-1$， 则是不稳定谐振腔(负分枝)	矩阵迹 $(A+D)$	若 $1>\frac{(A+D)}{2}>-1$， 则是稳定谐振腔。
$\lambda_1=\pm\exp(t)=\pm(\cosh t+\sinh t)^*$ 式中 $\cosh t=+\frac{(A+D)}{2}^*$ $\sinh t=+\left[\left(\frac{A+D}{2}\right)^2-1\right]^{1/2}$	主特征值λ_1 (t取正号，角θ的范围为π到0弧度)	$\lambda_1=\exp(i\theta)=\cos\theta+i\sin\theta$ 式中 $\cos\theta=\frac{(A+D)}{2}$ $\sin\theta=\left[1-\left(\frac{A+D}{2}\right)^2\right]^{1/2}$
曲率半径 R $R=\frac{(\lambda_1-D)}{C}=\frac{(A-D)}{2C}\pm\frac{\sinh t}{C}^*$ $\frac{1}{R}=\frac{(\lambda_1-A)}{B}=\frac{(D-A)}{2B}\pm\frac{\sinh t}{B}^*$	特征矢量比 $\left(\frac{y}{V}\right)=\left(\frac{\lambda_1-D}{C}\right)$ $\left(\frac{V}{y}\right)=\left(\frac{\lambda_1-A}{B}\right)$	复曲率参数 q $q=\frac{(A-D)}{2C}+\frac{i\sin\theta}{C}=z-iz_0$ $\frac{1}{q}=\frac{(D-A)}{2B}+\frac{i\sin\theta}{B}=\frac{1}{R}+\frac{i\lambda}{\pi w^2}^+$

(续表)

不 稳 定 谐 振 腔	所考虑的特性	稳 定 谐 振 腔
为了得到振荡，往返一次所需要的增益(二维情况)将为 exp(2t)。上述两个方程确定了输出波面的曲率半径。	高斯光束参数 1. 曲率半径 2. 波面发散度 3. 光束半径 4. 颈部的位置 5. 颈部半径 6. 共焦光束参数 7. 远场半角(以弧度为单位)	分解高斯光束参数，从 $1/q$ 方程中求得： $R=\frac{2B}{(D-A)}$ $\frac{1}{R}=\frac{(D-A)}{2B}$ $w=\left(\frac{\lambda B}{\pi\sin\theta}\right)^{1/2}$ (以上在输出参考平面上测量) 从 q 方程中得到： $z=\frac{(A-D)}{2C}$ (到参考平面左侧) $w_0=\left(\frac{-\lambda\sin\theta}{\pi C}\right)^{1/2}$ $z_0=\frac{\pi w_0^2}{\lambda}=\frac{-\sin\theta}{C}$ $\frac{\lambda}{\pi w_0}=\frac{w_0}{z_0}=\left(\frac{-\lambda C}{\pi\sin\theta}\right)^{1/2}$
良好，假设光学系统具有较大的菲涅耳数和相当高的增益。	模式鉴别能力	非常差。除非菲涅耳数较小。

* 式中给出两个正负交替的符号，正分枝应该使用上面一个符号，负分枝则使用下面一个符号。

+ 必须小心地将波长 λ 和表示主特征值的记号 λ_1 区别开来。

高斯函数的 q 值。

第三，即使严格限制谐振腔，使其只在中心产生一束高斯光束，但如果设计得不好，也仍会引起衍射效应。我们将通过考察 3.5 节所描述的两种谐振腔，来说明这种情况。

对第一种谐振腔（见图 3·11a），算得一个角 $\theta=\pi/6$ 的光学系统矩阵为

$$M=\begin{bmatrix} 0.800 & 0.657 \\ -0.386 & 0.932 \end{bmatrix},$$

在这种情况下，$\sin\theta-0.5$。将这些图解代入表 2 的公式中，得

$$R=\frac{2(0.657)}{0.932-0.800}=10.0\,\mathrm{m}$$

（输出波面的曲率半径和输出反射镜表面的曲率半径正好相等。）

$$\text{光斑半径 } w=\left[\frac{(0.633)10^{-6}(0.657)}{\pi(0.5)}\right]^{1/2}$$

$$=5.15\times10^{-4}\mathrm{m},$$

$$\text{或 } \underline{0.52\,\mathrm{mm}}$$

（这个数值对小型激光器比较合适。）

$$\text{颈部的位置 } z=\frac{(0.800-0.932)}{-0.386\times2}=\underline{0.171\,\mathrm{m}}$$

（光束的颈部位于谐振腔中心左侧的 17 cm 处。）

$$\text{颈部半径 } w_0=\left[\frac{(-0.633)10^{-6}(0.5)}{\pi(-0.386)}\right]^{1/2}$$

$$=5.11\times10^{-4}\mathrm{m}$$

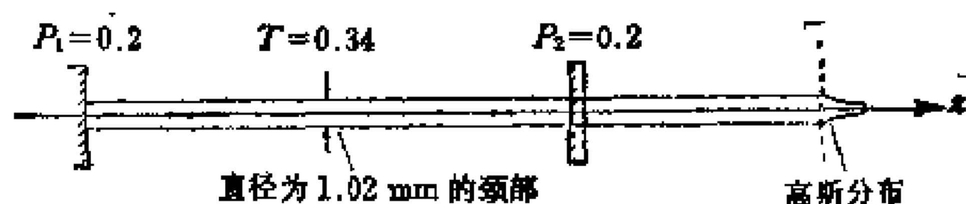
$$\text{即 } \underline{0.51\,\mathrm{mm}}$$

（它与光斑半径几乎相等，因此，腔内的高斯光束横截面几乎不变。）

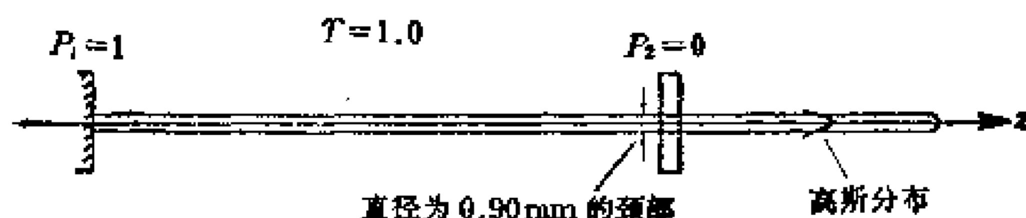
$$\text{共焦光束参数 } z_0=\frac{\pi(5.11\times10^{-4})^2}{0.633\times10^{-6}}=\underline{1.30\,\mathrm{m}}$$

光束的近场区，从与输出反射镜左侧相距 17 cm 处的颈部延伸到与输出反射镜右侧 1.13 m 处。在这一位置上，光斑半径将增加到 $\sqrt{2}\ w_0$（即 0.7 mm 左右），波面曲率半径则为 $R=2z_0=2.6\ \text{m}$（见图 3·13·a）。

$$\text{远场半角}\ \frac{\lambda}{\pi w_0}=\frac{0.633\times10^{-6}}{\pi(0.51\times10^{-3})}$$
$$=0.395\times10^{-3}\ \text{rad}$$
即 $\underline{0.40\ \text{mrad}}$



(*a*)



(*b*)
图 3.13

上述两个图解相当于设计一台可行的小型氦-氖气体激光器，而且表明，高斯光束每一次通过谐振腔时，都精确地再现本身固有的特性。

假设将一束共心高斯光束送入同一个谐振腔，这个高斯光束的光斑半径和 R 值都与谐振腔的固有高斯光束略为不同。这样，光束的完全重复就不再发生，不过，由于我们选定的特征值对应于 $\theta=\pi/6$（又因为这是一个对称模式），因此，在腔内经过

六次往返以后，光束将再次开始回复到原样。

倘若谐振腔的菲涅耳数比较大，那么，后一种类型的高斯光束就能无限次地循环下去。不过，当两块端面反射镜的孔径都减小时，损耗最小的光束，就是那些每次通过谐振腔后光斑半径严格保持不变的边缘光束。实际上，甚至在角 θ 等于 π 或 2π 的精确约数的情况下，基模通常也能达到稳定振荡。

这种情况的另一个例子，是 3.5 节讨论的第二种稳定腔即半共焦腔。在这种腔中，表示一次往返的矩阵是 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$，且主特征值为 $e^{+i\theta}=e^{i\pi/2}=i$，所以，$\sin\theta=1$。

因为在这种情况下，$A=D$，所以，立即可以看出，输出波面的曲率半径 R 为无穷大，而且因为 $z=0$，因而高斯光束的颈部就位于输出反射镜上。共焦参数 z_0 恰好为 1 m，w 和 w_0 两个公式给出了光束半径为：

$$\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/2}=\left[\frac{0.633\times10^{-6}}{\pi}\right]^{1/2}=4.49\times10^{-4}\ \text{m},$$

或 0.45 mm（见图 3.13b）

因为这个例子的颈部半径与上一个例子的颈部半径大体相同，所以再次得到远场半角发散度为 0.4 m rad。倘若假设这个激光管的长度比前一个例子长三倍，那就可以预料，它的光束功率多半也要大三倍，不过，其轴向模的数目也比短激光管的多。

我们不想在这儿讨论轴向模的选择问题。可是，有一个简单的公式，根据这个公式，一个给定的模的光学频率不仅与两块反射镜之间的间距以及轴向模的数目都有关，而且也与横向模的数目以及合成的特征值 $e^{i\theta}$ 都有关。关于这些问题，读者可以参考本书参考书目中给出的有关戈盖尔尼克和其他一些作者的著作。

不过，在继续考虑模匹配问题之前，我们也许应当回到上一节所提到的相位变化 ϕ_{12} 问题上来，即应用 $ABCD$ 法则，就能计算高斯光束从一个参考平面转移到另一个参考平面时所经历的相位变化 ϕ_{12}。一般来说，与这种相位变化有关的是亮度的改变，所以，光束中心区域的场强也会改变。

首先考虑一个当高斯光束的颈部半径 w_0 小到可与波长 λ 相比的情况。在整个相当大的角度范围（$\pm\lambda/\pi w_0$ 弧度）内，可以将到达 RP_1 上的光看作是近似等效于一个半径为 R_1 的球面波。我们可以用几何方法将这些光线表示成一个从颈部位置上发散出来的光锥。对这个光锥中的一条与光轴成夹角 V_1 行进的典型光线，可以规定其光线矢量为 $\begin{bmatrix} R_1V_1 \\ V_1 \end{bmatrix}$，在输出平面上则变换为

$$\begin{bmatrix} R_2V_2 \\ V_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} AR_1V_1+BV_1 \\ CR_1V_1+DV_1 \end{bmatrix}$$

假设这个光学系统无吸收，那么，所有到达 RP_1 的光都可以通过 RP_2；特别要指出的是，一个圆斑半径为 $y_1=R_1V_1$ 的光束在通过 RP_1 以后，其大部分能量也必定通过位于 RP_2 上半径为 $y_2=AR_1V_1+BV_1$ 的圆斑。因此，我们在考虑二维情况下的这个问题时，中心区域的能量集中度（即辐照度）显然应当乘以一个"面积因子" $\left(\dfrac{R_1}{AR_1+B}\right)^2$，其电场振幅也要乘以 $\left(\dfrac{R_1}{AR_1+B}\right)$，在一维情况下，电场振幅则要乘以 $\left(\dfrac{R_1}{AR_1+B}\right)^{1/2}$。

如上所见，当高斯光束的颈部区域不是太小而难以忽略时，并假设将每个 y/V 比值都解释为一个复数 q 值，而不是实数 R 值，那就可以获得一个正式的成功的描述。但是，要想在 y 值或 V 值本身应该是一个复数这个概念中找出任何含义来，却是十

分困难的。然而，可以在 3.6 节中发现，在计算衍射问题时，乘积因子 $q_1/(Aq_1+B)$ 的确使得上述复数的物理含义变得明确了。于是，我们说，这个复数因子的模数表示了上述所考虑的、并与比值 (y_1/y_2) 相对应的比值 (w_1/w_2)，且自变数 ϕ_{12} 表示整个光束的相位变化(除了非常大的相位变化 $2\pi K/\lambda$ 之外)。

为了证明

$$\left|\frac{q_1}{Aq_1+B}\right|=\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^2$$

可以将上式倒置，并采用 $ABCD$ 法则：

$$\frac{1}{R_2}+\frac{i\lambda}{\pi w_2^2}=\frac{1}{q_2}=\frac{Cq_1+D}{Aq_1+B}=\frac{C+D/q_1}{A+B/q_1}$$

$$=\frac{C+D/R_1+i\lambda D/\pi w_1^2}{A+B/R_1+i\lambda B/\pi w_1^2}$$

用分母的共轭复数分别乘以分母与分子，并将得到的乘积中的分母重新表示成它原来的形式 $(A+B/q_1)$，得

$$\frac{1}{R_2}+\frac{i\lambda}{\pi w_2^2}$$

$$=\frac{(C+D/R_1+i\lambda D/\pi w_1^2)(A+B/R_1-i\lambda B/\pi w_1^2)}{|A+B/q_1|^2}$$

令该方程的两个虚部相等，得

$$\frac{i\lambda}{\pi w_2^2}=\frac{i\lambda}{\pi w_1^2}\cdot\frac{(DA+DB/R_1-CB-DB/R_1)}{|A+B/q_1|^2}$$

$$=\frac{i\lambda}{\pi w_1^2}\,\frac{q_1^2}{|Aq_1+B|^2}$$

(因为 $(AD-BC)=1$)。因此，最后得到"光斑尺寸变换公式"：

$$(w_1/w_2)^2=|q_1/(Aq_1+B)|^2$$

或等效为

$$(w_2/w_1)=|A+B/q_1|$$

在一束高斯光束通过光学谐振腔内一次往返后便发射的特殊情况下，仍然能用复数因子 $q_1/(Aq_1+B)$ 来求出所产生的光

斑或相位变化的变换式。不过，如果选择 q_1 与谐振腔特征值 $(e^{i\theta}-D)/C=B(e^{i\theta}-A)$ 相一致，则表达式 $q_1/(Aq_1+B)$ 便简化为 $e^{-i\theta}$。不出我们所料，这时的光斑尺寸是不变的，但相位仍然有变化，且由谐振腔特征值 $e^{i\theta}$ 确定。（不稳定腔在相应的情况下，相位不变，但 y 值却要乘以光学系统的横向放大率即实特征值 e^t。）

在大多数的光学仪器中，整个光束的相位稍有变化是无关紧要的。但是，在激光谐振腔内，相位微小的变化是多次重复发生的，它会引起光束输出频率的微小变化。在非常精密的长度干涉法测量中，尤其是在涉及到红外或微波辐射的情况下，人们还需要校正这一类相位变化。

这里应当指出两项有关输出反射镜及其基底所造成的光学效应的注意事项。几乎在每一种情况下，部分反射镜的两个表面都是向里的；倘若假设其中的一个反射表面是曲面，那么，除非透过基底的另一个表面是一个补偿性的曲面，否则，整个元件就相当于一个准透镜，一般情况下，这是一个发散透镜。这类透镜不会影响腔内所产生的波形，不过，它会使实际输出光束的 R 值有微小的改变。可是，将输出反射镜的后表面做成略带凸形时，就有可能产生略微会聚的高斯光束。假若那样，光束的整个近场区域都可以供外部应用（下一节要讨论到这类无任何附加的模匹配光学元件的系统）。

其次，除非输出反射镜的后表面成一个相当大的楔形，或者涂镀上十分有效的增透膜，否则，在输出反射镜的后表面与前表面之间会发生干涉效应，它很可能在输出光束的截面上产生不需要的条纹或环状图样。对高增益的激光器系统而言，最好是将谐振腔的输出反射镜设计成平面镜；这样，便可以从起谐振腔反射镜作用的两个表面，得到所需要的光学反馈，并产生“平滑

的"输出。

当然，也可以采用一种更严格的方法来解决激光单模的振荡问题。例如，如果采用菲涅耳-惠更斯理论，就会发现，输出光波的振幅分布 $A(y)$ 必须满足下述积分方程：

$$\lambda A(y)=\int A(y')K(y, y')dy'$$

在这个方程中，积分核 $K(y, y')$ 是一个(复数)对称函数，它不仅包含了光束在谐振腔内一次往返后所发生的相位变化，而且也包含了光学系统的有限孔径所产生的截取效应。当然，截取效应所产生的损耗必须用激光放大增益进行足够的补偿。

这一节所讨论的一些简单的解式，实际上忽略了孔径效应，并用 $\exp[(2\pi i/\lambda)W(y, y')]$ 来代替 $K(y, y')$，其中 W 是常用的一次往返的程函函数。这个近似对于：(a) 具有菲涅耳数接近于 1 的稳定腔和(b)具有菲涅耳数较大、并有均匀增益的不稳定腔，都给出了有效的结果。

可是，如果要考虑一个介于稳定腔和不稳定腔之间较大范围内的谐振腔(例如平行平面腔或 $(A+D)/2$ 的额定值等于1的共心反射系统)时，就应该小心使用这些预测。必须对这些情况的全部衍射都进行计算；然面，即使是这样，也要谨慎地将任何光学像差，或泵浦感应的相位畸变包括在内，并且要考虑实际的激光系统在工作时所造成的任何动态或非线性效应，否则，这些计算是徒劳无益的。在许多情况下，要获得单模输出是十分困难的。

3.8 将 *ABCD* 法则应用于模匹配问题

虽然激光器是一类十分特殊的光源，但是，它们已得到各种广泛的应用；所以，激光器的使用者迟早会发现，他需要将高斯

光束的形状变换成另外一些更适当的形状。因此，有人会劝告他去购买一台商售装置，例如扩束器；不过，在许多情况下，只需要用一个简单的透镜就行了。本节将指出如何处理这一类的光学变换问题。

首先来考虑，在经典的光学成像系统中，例如将一个光学系统与另一个光学系统串接使用时所出现的问题。例如，如果探索彗星或超新星已引起公众的巨大兴趣的话，那么，广播工程师就可能要求暂时将一个电视摄像系统与现有的天文望远镜耦合起来。

为了使这种耦合完全令人满意，第二个光学系统所具有的空间区域必须至少和第一个光学系统一样大，而且，如果要保证分辨本领不降低的话，第二个光学系统的空间带宽乘积就必须达到与第一个光学系统同样的值。倘若这些条件都得到满足，而且如果望远镜的出射窗口和摄像机的入射窗口一起都位于无穷远处，那么，必须保证摄像机的入射光瞳的位置和大小都与望远镜的出射光瞳完全一致。（如果不满足这些条件，就容易发生光晕，关于这一点将放在附录 A 中讨论。）

假设有一种更加困难的情况，在这种情况下，虽然两个光学系统都具有相同的空间区域，但是它们的窗口和光瞳却有不同的直径，而且位于不同的 z 位置上（尽管不是无穷远）。

为了详细说明第一个光学系统的孔径特性，现在将参考平面 RP_1 取在这个系统的最后一层表面的外表面上，但它与系统的出射光瞳或出射窗口并不重合。假设，该系统的出射光瞳位于 RP_1 左侧一段距离 R_1 的位置上，并用 V_1 表示一条从出射光瞳中心到出射窗口边缘的光线的最大角度。显然，在 RP_1 上相伴的光线矢量为 $\begin{bmatrix} V_1R_1 \\ V_1 \end{bmatrix}$。

同理，若出射窗口与 RP_1 左侧相距一段距离 R_1'，而 V_1' 表示一条从 RP_1 中心到出射光瞳边缘的光线的最大角度，则相伴的光线矢量为 $\begin{bmatrix} V_1'R_1' \\ V_1' \end{bmatrix}$。

如同在 3.3 节中讨论的那样，这两条极端光线矢量所形成的一个矩阵的行列式，确定了第一个系统的空间区域。这里称这个矩阵为 S_1

$$S_1=\begin{bmatrix} V_1R_1 & V_1'R_1' \\ V_1 & V_1' \end{bmatrix}$$

以类似的方法表示第二个光学系统的特性，并将参考平面 RP_2 选择在该系统的第一个光学元件之前的一段合适的距离上。若入射光瞳位于 RP_2 左侧一段距离 R_2 的位置上，则一条从 RP_2 的中心到入射窗口边缘的光线，由光线矢量 $\begin{bmatrix} V_2R_2 \\ V_2 \end{bmatrix}$ 表示，其中 V_2 为入射窗口容许的最大角度。同理，$\begin{bmatrix} V_2'R_2' \\ V_2' \end{bmatrix}$ 表示了一条从入射窗口中心（与 RP_2 左侧相距一段距离 R_2'）到入射光瞳边缘的光线。（估计 R_2 和 R_2' 两者都可能是负数。）

因此，可以将这样表示的两个输出光线矢量组合成一个输出光线矩阵，即

$$S_2=\begin{bmatrix} V_2R_2 & V_2'R_2' \\ V_2 & V_2' \end{bmatrix}$$

同样，这个矩阵的行列式表示了第二个光学系统的空间区域。就目前的计算而言，假设行列式 $\det(S_2)$ 恰好与 $\det(S_1)$ 相等。（实际上，如果第二个光学系统是一台具有可变圆孔光阑的摄像机，那么，最好将光阑直径开到略大于精确匹配所要求的大小。）

为了达到这两个系统的精确匹配，必须在 RP_1 和 RP_2 之间

插入一个其矩阵为 M 的辅助光学系统，它满足如下的矩阵方程：

$$MS_1=S_2$$

式中，S_1 和 S_2 都是前面定义过的矩阵。

假定 S_1 的行列式不为零，那就可用逆矩阵 S_1^{-1} 去右乘上述矩阵方程的两边，于是得到一个有关 M 的显式方程：

$$MS_1S_1^{-1}=M=S_2S_1^{-1}=S_2\ \frac{\mathrm{adj}(S_1)^T}{\det(S_1)}$$

或者将其各个元素全部列出来，即

$$\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}=\frac{\begin{bmatrix}R_2V_2 & R_2'V_2'\\ V_2 & V_2'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1' & -V_1'R_1'\\ -V_1 & V_1R_1\end{bmatrix}}{V_1V_1'(R_1-R_1')}$$

为了消去式中的 V 值，最方便的办法是用记号 m 来表示一条光线的角放大率 (V_2/V_1)，这条光线从光学系统 1 的出射光瞳的中心发出，并成像在光学系统 2 的入射光瞳的中心；因为线放大率与角放大率互成倒数，所以 m 也等于比值 $\frac{\text{系统 1 的出射光瞳半径}}{\text{系统 2 的入射光瞳半径}}$。

同样，用记号 $m'=(V_2'/V_1')$ 表示为一个"窗口放大因子"。不过，在这儿应该指出，为了使两个系统的空间区域相等，m 和 m' 两个值之间应当存在一个关系式，即

$$\det(S_1)=\begin{vmatrix}V_1R_1 & V_1'R_1'\\ V_1 & V_1'\end{vmatrix}=V_1V_1'(R_1-R_1')$$

和 $$\det(S_2)=\begin{vmatrix}mV_1R_2 & m'V_1'R_2'\\ mV_1 & m'V_1'\end{vmatrix}=mm'V_1V_1'(R_2-R_2')$$

由此推知 $$mm'=(R_1-R_1')/(R_2-R_2')$$

记住 m 和 m' 之间的这个关系，现在就可以列出

$$M=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}=\frac{\begin{bmatrix}mV_1R_2 & m'V_1'R_2'\\ mV_1 & m'V_1'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1' & -V_1'R_1'\\ -V_1 & V_1R_1\end{bmatrix}}{V_1V_1'(R_1-R_1')}$$

若将上式分子中的两个矩阵一起相乘，并用分母中的纯量 $V_1V_1'\times(R_1-R_1')$ 去除所得结果的每一个元素，则最终得到：

$$M=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{(mR_2-m'R_2')}{(R_1-R_1')} & \dfrac{(m'R_1R_2'-mR_1'R_2)}{(R_1-R_1')}\\ \dfrac{(m-m')}{(R_1-R_1')} & \dfrac{(m'R_1-mR_1')}{(R_1-R_1')}\end{bmatrix}$$

于是，矩阵 M 的每一个元素 A、B、C 和 D 都完全确定了，不过，仍然需要设计一个表示这个矩阵的光学系统。这里只讨论所需要的光瞳和窗口放大因子 m 和 m' 值都相等的情况。在那种情况下，矩阵元素 C 显然为零，因而需要一个角放大率为 m 的无焦系统；这种系统所需的矩阵取如下形式

$$\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/m & \dfrac{m(R_1R_2'-R_1'R_2)}{(R_1-R_1')}\\ 0 & m\end{bmatrix}$$

角放大率为 m 的无焦系统将涉及到一对共轭的参考平面，其基本矩阵(列在 3.1 节中)为 $\begin{bmatrix}1/m & 0\\ 0 & m\end{bmatrix}$。可是，如果用适当的 $\mathscr{T}$ 矩阵去左乘和右乘这个基本矩阵，就可以将矩阵元素 B 控制到所需的数值：

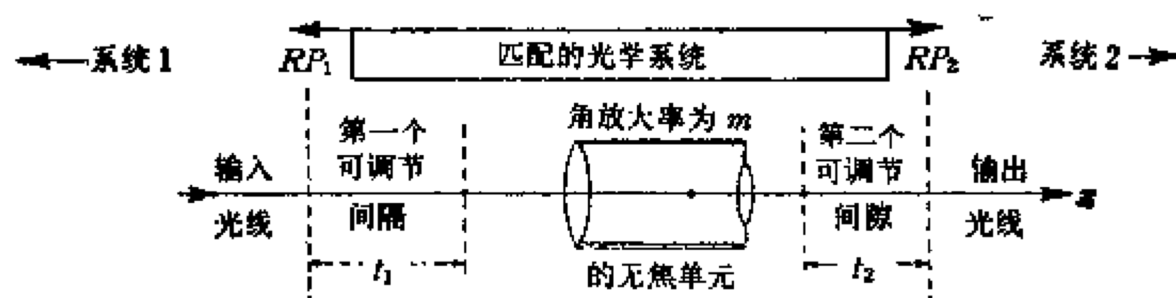
$$\begin{bmatrix}1 & t_2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/m & 0\\ 0 & m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & t_1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/m & (t_2m+t_1/m)\\ 0 & m\end{bmatrix}$$

在实际工作中，可以将无焦单元或第二个光学系统沿着光轴滑到这样一个位置上，即

$$(t_2m+t_1/m)=\frac{m(R_1R_2'-R_1'R_2)}{(R_1-R_1')}$$

（因为我们在光学系统配置中有两个可调节的参数 t_1 和 t_2，所以上面的做法应该是不困难的。）

下面是一个表示这种情况的简图：



$$\begin{bmatrix}R_1V_1 & R_1'V_1'\\ V_1 & V_1'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & t_1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}1/m & 0\\ 0 & m\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1 & t_1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}mV_1R_2 & mV_1'R_2'\\ mV_1 & mV_1'\end{bmatrix}$$

（注意，倘若计算表明，需要 t_1 或 t_2 为负数，那么，使用一个负放大率的无焦单元是有益的；虽然所需的 t 值仍为负数，但这个单元的一对共轭平面将更加互相靠近，所以，RP_1或 RP_2"隐藏"在光学匹配系统中的危险性就更小了。不过，使用者应该注意，最后所合成的像是一个倒像。其次，虽然矩阵方法有助于处理这样一个问题，但是，它们也不是一种万应灵验的方法。工程师也要依赖这个领域所取得的各种经验：例如，他应该考虑使用场透镜，并且应该研究在潜艇潜望镜或光学信息处理系统中是如何处理像的传递的。）

现在回到激光束的变换和整形问题上来，这个问题从各个方面来说都是比较容易的。这样，输出光束就有恰当的几何形状与某些外界光学系统相匹配。几乎在任何功率水平下，都可能出现这个问题。

例如，氦氖气体激光器的功率是几个毫瓦，这种激光器多半用作调准工具和干涉仪的光源，而且往往放在很远的距离上使用。它也可以用作检测光学系统，或记录以及再现全息照片的

光源。功率为数瓦的中功率激光器用于全息照相、通讯和眼外科，也可以作为染料激光器的泵浦源，以及快扫描读数和显示装置的光源。在"高"功率范围内的应用，包括焊接和加工，脉冲全息照相和激光雷达(包括月球测距)等等；更强的激光器乃是某些用于非线性光学实验以及等离子体研究的脉冲激光器。在激光等离子体的研究中，聚焦光束产生几百万度的温度，它足以发生某些热核聚变。(在等离子体研究中，激光脉冲宽度短到 10^{-11}s，而其瞬时功率却可以高达 10^{18}W！)

当激光束的功率达到兆瓦级水平时，光束传输很可能成为光束所通过的介质(空气、玻璃和液体等等)产生摧毁性击穿的原因。在这种强度下，非线性效应可能会产生自聚焦现象，而且甚至在千瓦功率水平下，如果介质不是完美的透明体，就必须考虑光束的加热效应。这里只限于讨论一些激光束输出为小、中功率时的情况，这时上述种种效应都不严重。

不过，在这里必须指出，即使是一个 1 mW 的激光束，对眼睛也会造成轻度的损伤。已经发布的激光安全规则和条例，为我们提供了一个可靠的保险标准。每一个激光器的使用者都应该注意严格遵守。对着一束细窄的激光束去看是愚蠢的，这和不戴适当的防护镜盯着太阳看是一回事。

在大部分模匹配问题中，从激光器中输出的高斯光束都具有圆形横截面，而且需要将这个光束输送到一个也具有圆对称的外部光学系统中。但是，有时也需要将圆形光束变换成具有高椭圆度截面的光束，或者反过来变换。假定，选取 x 和 y 两条轴分别与一个椭圆的长轴和短轴相重合，并分别指定 x 方向和 y 方向各自的 q 值以及各自的光线转移矩阵，那么，处理这些变换就十分容易了。我们实际上是在进行两个独立的一维计算，因此，可以将任何一点(x, y, z)上的电场振幅确定为两个函数

$\exp\left[\frac{2\pi i}{\lambda}\ \frac{(y)^2}{2q_y}\right]$和 $\exp\left[\frac{2\pi i}{\lambda}\ \frac{(x^2)}{2q_x}\right]$ 的乘积。于是，$1/qx$ 和 $1/qy$ 的实部便分别表示两个波面的主曲率，如果这两个主曲率不相等，那就必定会出现像散。同理，若两个虚部不相等，则光束的等能量轮廓线就不是圆形的，而是椭圆形的。

在这里，只要考虑一维问题或与柱面对称有关的问题就够了。在那种情况下，在常数为 z 的任何平面上，高斯光束的几何形状都可以完全由其复数 q 值所确定，q 值正好有两个自由度。

现在希望确定一个能从给定的 q 值变换到另一个 q 值的光学系统。要记住，光线转移矩阵的行列式必须等于1，一个实数方程和一个复数方程中的四个实元素 A、B、C 和 D 必须满足下述两式：

$$q_2=\frac{(Aq_1+B)}{(Cq_1+D)}\quad 和\quad (AD-BC)=1$$

因为一束高斯光束的 q 值总是包含有一个虚元素，因此前一个方程就可以分解成实分量和虚分量两部分。所以，现在实际上有三个方程，而且它们的矩阵元素都没有完全确定(除了不太可能的情况之外，一般都要求详细说明两个参考平面之间所发生的附加的相位变化 $\phi_{12}=$ 自变数$[(Aq_1+B)/q_1]$)。

在这些数学处理中，一个参数已知，对寻找一个适当的光学匹配系统是十分宝贵的。例如，如果你手里只有几个透镜，那么，比较有效的方法就是修改光学匹配系统的设计，以适应其中的一个透镜的参数。

3.8.1 变换光束的光学系统

现在先回顾一下两类最简单的变换——用单个 $\mathscr{T}$ 矩阵或单个 $\mathscr{R}$ 矩阵就可以完成这两类变换。

若用一个厚度为 T 的空的间隔将两个参考平面 RP_2 与 RP_1 分开，则根据 $ABCD$ 法则立即得到：

$$q_2=\frac{1\times q_1+T}{0\times q_1+1}=q_1+T$$

换言之，q 的实部，即描述光束颈部位置的 z 值增加了 T，而虚部($-iz_0$)仍不变。读者还会记得，z_0 是"共焦光束参数"，其值为 $\pi w_0^2/\lambda$，其中 w_0 是颈部半径。

现在考虑一个光焦度为 P 的薄透镜的作用。取 $ABCD$ 法则的倒置形式，得

$$1/q_2=\frac{Cq_1+D}{Aq_1+B}=\frac{-Pq_1+1}{q_1}=1/q_1-P$$

在这种情况下，由于透镜的会聚本领，使得 $1/q_1$ 的实部即光束的发散度 $1/R$ 减小了；而表示光束在某位置上的光束半径 w 的虚部($i\lambda/\pi w^2$)则仍保持不变。(一个透明度良好的透镜只改变波场的形状，而不改变其能量。)

在极少数情况下，输入光束已经具有正确的颈部半径或正确的光束半径，这样，所需的光学匹配系统仅仅是一个简单的间隔，或一个具有恰当光焦度的透镜。可是，比较普遍的情况是，模式匹配系统要求至少包含一个 $\mathscr{T}$ 矩阵或一个 $\mathscr{R}$ 矩阵。

倘若间隔处在透镜的前面，那么必须调节间隔的宽度，使得当光束到达透镜时，光束已扩展到合乎需要的口径；然后再选择透镜，以产生所需要的发散度或波面曲率。另一方面，如果将透镜放在间隔的前面，那就必须先选择透镜，利用透镜产生一束新的高斯光束，并具有最终所需的颈部半径，然后再调节间隔，使上述颈部与 RP_2 相距一段合乎需要的距离。

为了使这两种方法都获得成功，要求能够找到一个具有恰当焦距的透镜。实践证明，眼科医师用的试验透镜是一台有效的仪器。不过，有时也会出现一些困难，因为所规定的间隔值结果是一个负数或者是非常大的数。在某些情况下，再加一个透

镜，可能会有助于组成一个更紧凑的装置；也可以找到另一个精巧的解决办法，即选择一个焦距恰当的透镜，然后将它放在两个间隔的中间，每一个间隔都可以调节到所需要的宽度。

在详细说明这样一个系统的两个间隔时，可以采用无量纲的"g 参数"，它以透镜的焦距衡量从 RP_1 到第一焦平面的距离，以及从第二焦平面到 RP_2 上的距离。因此，这个系统矩阵为

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & g_2 f \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & f \\ -1/f & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & g_1 f \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & g_2 f \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & f \\ -1/f & -g_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -g_2 & f(1-g_1 g_2) \\ -1/f & -g_1 \end{bmatrix}$$

在讨论输入和输出光束的几何形状时，按照光束颈部的大小和位置来思考问题，常常是比较方便的。这里先考虑两个参考平面分别与光束的两个颈部实际上相重合的情况（见图 3.14）。于是，由此推知，输入和输出光束两者都有一个纯虚数的 q 值。因此，可以写出 $q_1 = -iz_{01}$ 和 $q_2 = -iz_{02}$，其中的两个正的实数 z_{01} 和 z_{02} 分别表示两个相应的共焦光束参数。将这些值代到 $ABCD$ 法则中，得

$$-iz_{02} = \frac{(-g_2)(-iz_{01}) + f(1-g_1 g_2)}{(-1/f)(-iz_{01}) - g_1}$$

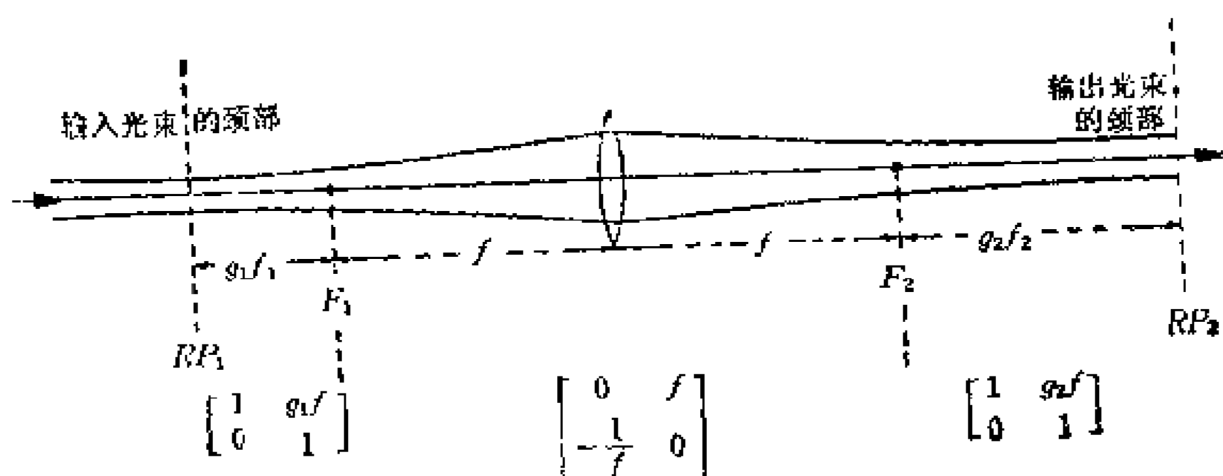
$$= \frac{ig_2 z_{01} + f(1-g_1 g_2)}{iz_{01}/f - g_1}$$

用异于零的分母$(iz_{01}/f - g_1)$去乘上式，并将其实部和虚部分开以后，最后得

$$z_{02} z_{01} = f^2(1 - g_1 g_2)$$

和

$$g_1 z_{02} = g_2 z_{01}$$



（注意：和图 3.13 一样，高斯光束半径已夸大了。）

图 3.14

因为 z_{01} 和 z_{02} 都必须是正数，且第二个方程也表明，g_1 和 g_2 两者必须有相同的符号，所以乘积(g_1g_2)也必定是正数。由第一个方程可以推知，当光束颈部以这种方式从 RP_1 传递到 RP_2 时，z_{01} 和 z_{02} 两者的几何平均值决不会超过所使用的透镜的焦距值。在一个 $g_1=g_2=g$ 的对称的光束传递系统中，可以得到 $z_{01}=z_{02}=z_0=f(1-g^2)^{1/2}$。

如上所见，倘若将高斯光束的颈部半径做得非常小，那么，发散的渐近角 $(\lambda/\pi w_0)$ 就变得相当大，光束开始类似于一簇从颈部区域发出的球面波。在接近这些几何光学极限时，z_{01} 和 z_{02} 都变得非常小，于是第一个方程表明，$(1-g_1g_2)$ 项趋近于零。所以，g_2 最终变成 g_1 的倒数，这与一个经典的有关物、像以及焦距三者之间关系的牛顿方程相一致。

第二个方程可以重新写成一个用颈部半径表示的方程，即

$$w_{02}^2/w_{01}^2=z_{02}/z_{01}=g_2/g_1$$

在 $g_1=g_2$ 的几何极限中，可以将因子 g_2 看作是横向放大率 (w_{02}/w_{01})，而(w_{02}/w_{01})就是颈部区域成像的放大率。

可是，除了这种极限情况之外，将光束颈部的任何变换都看作是普通的成像过程，那是十分错误的。例如，当输入光束的颈

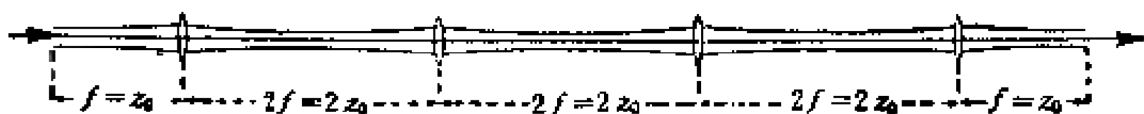
部位于第一焦平面时，g_1就等于零。读者也许会以为"光束颈部的像"出现在无穷远处的输出平面上。然而在实际上，第二个方程表明 g_2 也必须等于零，因此，输出光束的颈部就落在第二焦平面上。这种情况下的共焦光束参数由 $z_{01}z_{02}=f^2$ 给定。

（用光学术语来讲，第二焦平面上的扰动，实际上就是输入光束的远场或夫琅和费衍射图样；扰动一般出现在无穷远处，但可用透镜将它聚焦到第二焦平面上。用数学术语来讲，这两个平面的振幅扰动总是与一对傅里叶变换式相关，并且因为第一个函数是一个无二次相位变化的高斯实函数，因而第二个函数也必须完全是实数。）

若输入光束的共焦参数 z_{01} 等于焦距 f，则 z_{02} 也等于 f，这样，就有一个可以用作光学传递系统的自重复系统，如图 3.15 所示。如果这类系统完全没有吸收和反射损耗，那么，这类系统就提供了从一点到另一点进行光通讯的可能性。对于一束波长为 800 nm，其最小颈部半径为 10 mm 的激光束，它的共焦光束参数应当等于 $\pi 10^{-4}/(8\times10^{-7})$，即刚刚低于 400 m。所以，一个光学传递系统需要一连串光焦度非常小(1/400 屈光度)的透镜，每一个透镜的直径约为 100 mm，两镜之间的间距为 800 m(必须在一条直线上！)。

偶然也会遇上另一种情况，即输出光束的颈部恰好与输入光束颈部的几何像相重合的情况，这种情况用矩阵方法很容易识别。

这时，g_1 和 g_2 都必须是纯虚数，光学系统的光线转移矩阵



光学传递系统中的四个相继的元件

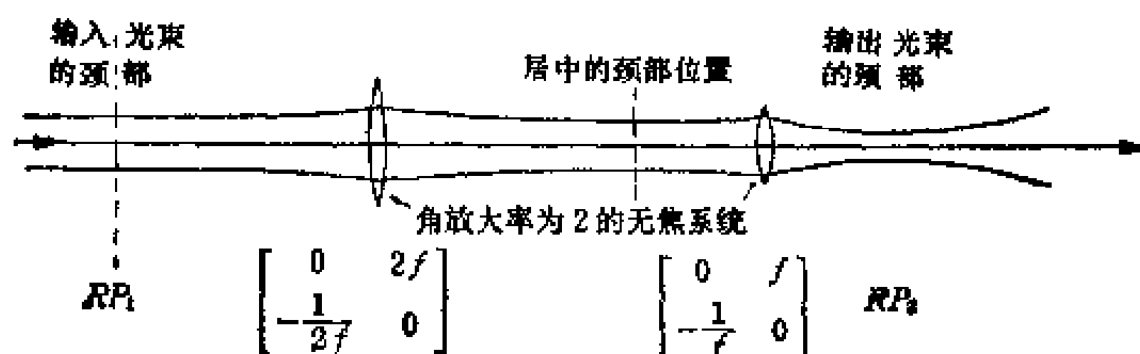
图 3.15

也必定是$\begin{bmatrix} m & 0 \\ -1/f & 1/m \end{bmatrix}$，并可以在两个参考平面之间成像，式中的$m$是横向放大因子。于是，$ABCD$ 法则指出

$$-iz_{02}=\frac{-miz_{01}+0}{(iz_{01}/f+1/m)}$$

读者立即可以看出，只有当分母完全是实数时，这个方程才成立；而且因为 z_{01} 必须是正的实数，所以焦距 f 应当是无穷大。因此，它是一个具有这种特殊性质的无焦系统。如果希望的话，也可以将这样一个系统的矩阵当作两个相继的"焦平面矩阵"即$\begin{bmatrix} 0 & f \\ -1/f & 0 \end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix} 0 & mf \\ -1/f & 0 \end{bmatrix}$的乘积。实际上，这就是一个双傅里叶变换过程，这种变换过程的第一步是，将光束的颈部从输入焦平面转移到居中的焦平面上，第二步是由此再转移到输出焦平面上（见图 3.16）。

本节到目前为止所考虑的情况都是输入和输出光束的 q 值分别已知，而且能用 $ABCD$ 法则求出变换所需的光学系统的类型。现在来讨论两个稍微不同的问题，即光束变换系统已知，而对输入和输出光束的 q 值却没有完全了解的情况。



（颈部半径缩小 1 倍，但发散度却扩大 1 倍）

图 3.16

3.8.2 如何获得良好的聚焦

倘若已知两个条件(a)一台激光器，其输出是一束颈部半径为 w_{01} 的高斯光束，相应的共焦光束参数为 $z_{01}=(\pi w_{01}^2/\lambda)$，和(b)一个光学系统，从参考平面 RP_1 到 RP_2 的光线转移矩阵为 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$。将光学系统安装在一台滑动支架上，以改变光学系统与激光器之间的间距。试问：从 RP_2 输出的光束的最小光斑半径 w_{02}(在颈部位置上测量)是多少？w_{02} 与 z_1(输入光束的颈部和 RP_1 之间的间距)的依赖关系如何？

解：显然，这种情况下的输入的 q 值由 $q_1=z_1-iz_{01}$ 给出，因而输出的 q 值为

$$q_2=\frac{(Aq_1+B)}{(Cq_1+D)}=\frac{(Aq_1+B)(Cq_1^*+D)}{(Cq_1+D)(Cq_1^*+D)}$$

(*号表示复共轭)。若现在仅仅保留这个方程的虚部，则得

$$Im(q_2)=\quad iz_{02}=\frac{-iAz_{01}(Cz_1+D)+(Az_1+B)iCz_{01}}{(Cz_1+D)^2+C^2z_{01}^2}$$

$$=\frac{-iz_{01}[ACz_1+AD-ACz_1-BC]}{(Cz_1+D)^2+C^2z_{01}^2}$$

$$=\frac{-iz_{01}}{(Cz_1+D)^2+C^2z_{01}^2}$$

(方括弧中的表达式已简化为 1)。

若现在分别用 $\pi w_{01}^2/\lambda$ 代替 z_{01}，用 $\pi w_{02}^2/\lambda$ 代替 z_{02}，则最后结果为

$$w_{02}^2=\frac{w_{01}^2}{(Cz_1+D)^2+C^2\pi^2w_{01}^4/\lambda^2}$$

在光学系统是一个焦距为 f 的单透镜，且 RP_1 和 RP_2 分别位于两个焦平面上的情况下，则有

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & f \\ -1/f & 0 \end{bmatrix}$$

因此
$$w_{02}^2=\frac{w_{01}^2 f^2}{z_1^2+\pi^2 w_{01}^4/\lambda^2}$$

如果希望将这个颈部半径减到最小，一般来说，要借助于一个短焦距的透镜；不过，也可以滑动透镜，使其远离激光器，这样，间距 z_1 就远大于共焦光束参数 $z_{01}=\pi w_{01}^2/\lambda$。因此，光束进入到透镜孔径的光斑半径就增大了，再假定光束的光斑半径没有填满透镜的孔径，于是，就得到了一束更强的会聚输出光束。最终确定光束颈部半径的是数字孔径（在这种情况下，数字孔径为 $\lambda/\pi w_{02}$）。

可以把刚才得到的带有一般性的方程看作是一个"颈部变换公式"：

$$z_{02}/z_{01}=w_{02}^2/w_{01}^2=\frac{1}{(Cz_1+D)^2+C^2z_{01}^2}=\frac{1}{|Cq_1+D|}$$

这个方程虽然与 3.7 节中得到的光斑变换公式不同，但仍可进行比较，3.7 节中的光斑变换公式只取了方程 $1/q$ 的虚部。在这个方程的倒置式中，光斑变换公式为

$$w_2^2/w_1^2=|A+B/q_1|^2$$

3.8.3 对一束两个波面曲率已知的高斯光束求解

有一束高斯光束越过一个介于两个参考平面 RP_1 与 RP_2 之间、其宽度为 d 的空的间隔向前传输。已知该光束越过 RP_1 时的波面曲率半径为 R_1，越过 RP_2 时的波面曲率半径为 R_2，试求该光束的其他参数，如颈部的大小和位置，以及在 RP_1 与 RP_2 上的光斑半径。

解： 若令 $q_1=z_1-iz_0$，则从 $ABCD$ 法则中得 $q_2=q_1+d=(z_1+d)-iz_0$。若将这两个方程都倒置，则

$$\frac{1}{q}=\frac{1}{z_1-iz_0}=\frac{z_1+iz_0}{z_1^2+z_0^2}=\frac{1}{R_1}+\frac{i\lambda}{\pi w_1^2} \qquad (3.1)$$

和

$$\frac{1}{q_2}=\frac{1}{(z_1+d)-iz_0}=\frac{(z_1+d)+iz_0}{(z_1+d)^2+z_0^2}=\frac{1}{R_2}+\frac{i\lambda}{\pi w_2^2} \tag{3.2}$$

只取这两个方程的实部，从方程(3.2)中便得：

$$z_1^2+2z_1d+d^2+z_0^2=z_1R_2+dR_2 \tag{3.3}$$

从方程(3.1)中得

$$z_1^2\qquad\qquad+z_0^2=z_1R_1 \tag{3.4}$$

用方程(3.3)减方程(3.4)，得

$$2z_1d+d^2=dR_2+z_1(R_2-R_1)$$

或

$$z_1=\frac{d(R_2-d)}{(2d+R_1-R_2)} \tag{3.5}$$

为了得到 z_0 的表示式，将上式代到方程(3.4)中，经少量代数运算后，得

$$z_0^2=R_1z_1-z_1^2=\frac{dR_1(R_2-d)(2d+R_1-R_2)-d^2(R_2-d)^2}{(2d+R_1-R_2)^2}$$

$$=\frac{d(R_2-d)(2dR_1+R_1^2-R_1R_2-dR_2+d^2)}{(2d+R_1-R_2)^2}$$

可以简化为

$$z_0^2=\pi^2w_0^4/\lambda^2=\frac{d(R_2-d)(R_1+d)(d+R_1-R_2)}{(2d+R_1-R_2)^2} \tag{3.6}$$

为了获得 w_1 值，根据方程(3.4)，并采用方程(3.1)的虚部，得

$$\frac{\lambda^2}{\pi^2w_1^4}=\frac{z_0^2}{(z_1^2+z_0^2)^2}=\frac{z_0^2}{(z_1R_1)^2}$$

将上述方程倒置，并将方程(3.5)和(3.6)代入，得

$$\frac{\pi^2w_1^4}{\lambda^2}=\frac{d^2(R_2-d)^2R_1^2(2d+R_1-R_2)^2}{(2d+R_1-R_2)^2d(R_2-d)(R_1+d)(d+R_1-R_2)}$$

因而

$$w_1^4=\frac{\lambda^2 d(R_2-d)R_1^2}{\pi^2(R_1+d)(d+R_1-R_2)} \tag{3.7}$$

同理，为了获得 w_2 值，根据方程(3.3)，并采用方程(3.2)的虚部，得

$$\frac{\lambda^2}{\pi^2 w_2^4}=\frac{z_0^2}{((z_1+d)^2+z_0^2)^2}=\frac{z_0^2}{R_2^2(z_1+d)^2}$$

将上述方程倒置，并将方程(3.5)和(3.6)代入，最后得

$$w_2^4=\frac{\lambda^2 d(R_1+d)R_2^2}{\pi^2(R_2-d)(d+R_1-R_2)} \tag{3.8}$$

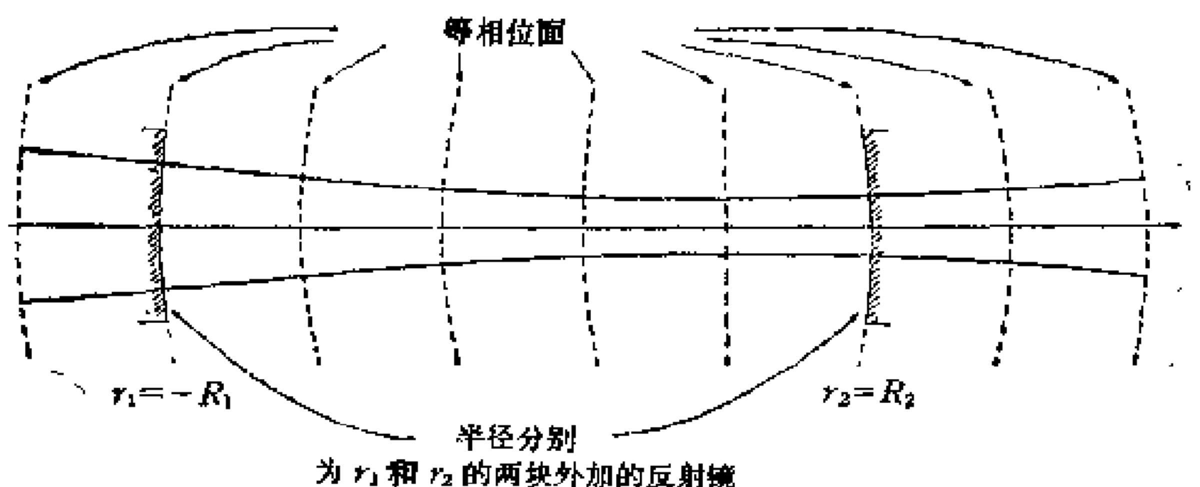
最后，距离 z_2（从颈部测到 RP_2）为

$$z_2=(z_1+d)=\frac{d(R_2-d)}{(2d+R_1-R_2)}+d$$

$$=\frac{d(R_1+d)}{(2d+R_1-R_2)} \tag{3.9}$$

只有在三个方程(3.6)、(3.7)和(3.8)分别表明 w_0^2、w_1^2 和 w_2^2 三者都为正数时，刚才得到的解才是真正可靠的。例如，在空的空间中，光束不可能从发散波面接着就改变成会聚波面。

因为即使高斯光束的传输方向相反，光束的几何形状也会保持不变，所以，这些方程同样可以用来解决相对应的谐振腔问题。如果将两块曲率半径分别取为 $r_1=-R_1$ 和 $r_2=R_2$，并且将曲面向里的球面反射镜分别安放在 RP_1 和 RP_2 上，那么，高斯光束的波面就和任何一个反射镜的曲面相一致；于是，光束就会无限次地向前和向后来回反射（见图 3.17）。我们已经计算过的光束形状就是相对应的光学谐振腔的基模。（可是，要注意，因为 RP_1 上的反射镜的曲面向右，所以，反射镜的曲率 r_1 必须取负号，它与沿着 $+z$ 方向传播的光波所需的曲率符号正好相反。）



若两块外加的反射镜分别与高斯光束的两个
相位面相重合，则有可能产生驻波图样。

图 3.17

3.9 类透镜分布介质的光线转移矩阵

到目前为止，本书所考虑的合轴光学系统都只由两类基本元件，即间隔以及折射或反射表面所形成。可以将后者当作一个介于两种不同介质之间的不连续的边界面，这个边界面有着均匀的折射率。在这些元件中，每一个元件都是容易鉴别的，而且极易由适当的 $\mathscr{T}$ 矩阵或 $\mathscr{R}$ 矩阵来表示。

可是，有时也会出现这样的情况：介质的折射率不是常量，而是随位置坐标(x, y, z)平滑地变化。最简单的情况大概就是一个"类透镜分布"了，在这种分布中，介质折射率 n 的大小与离光轴 Oz 的距离成平方关系，而且呈圆柱体对称，本节将简略地讨论这种情况。读者将会看到，当光束以近轴方式通过这样一个分布进行传输时，"抛物线"轮廓的作用限制了光辐射，从而使光束保持在光轴附近。

人们或许会记得，这并不是一个新的课题，在半个世纪前，R. W. 伍德 (R. W. Wood) 在物理光学一书中就曾经讨论过。

不过，有两个主要原因，使这个课题近来变得越来越重要了。

第一个原因是，在光通讯中，对有效的光学传递系统的要求正在日益增长。已经有若干关于如何故意产生一个类透镜分布的研究，例如在气体介质中，通过设计适当的放电管内的温度梯度来达到这个目的；固体方案则是通过仔细控制光纤维内的杂质扩散过程来实现的。

第二个原因是，只要采用强激光器，都会自发出现这种类透镜分布。当脉冲激光器达到兆瓦级水平时，介质的折射率就会稍有增长，这意味着，或者在谐振腔内，或者在腔外，都有可能发生“自聚焦效应”。这种效应会使昂贵的光学材料击穿或断裂，而且也使得人们难以了解激光束传输时的几何形状。

用下述方程来表示这种分布：

$$n(x, y, z)=n_0(1-{}^1/_2\alpha^2r^2)=n_0[1-{}^1/_2\alpha^2(x^2+y^2)]$$

式中，n 表示介质折射率，n_0 表示光束在光轴上传输时的介质折射率，把二次系数 α 当作是 n 降到其中心值一半时的光斑半径的倒数。（这仅仅是假设。在实际情况中，只有在抛物线轮廓的中心区域才真正存在这种情况，即使在光学系统的边缘地带，α^2r^2 通常也是非常小的，小于 0.01。）

当然，折射率也可能随离轴距离的平方而增加，而不是减小；现在必须假设参数 α 是虚数，才能表示这种状况。（将 α 取为复数，也可以表示吸收或增益的二次方变化关系。）

为了建立一个光学特性为这种分布的光线转移矩阵，先考虑一个包含在两个平面 $z=z_0$ 和 $z=z_0+\delta z$ 之间的无穷薄的薄片的情况。可以将这块薄片看作不仅是引进了一个约化厚度为 $\delta z/n_0$ 的间隔，而且也引进了一个由下式给定的不均匀的光学延迟：

$$W(x, y)=[n(x, y)-n_0]\delta z=-{}^1/_2n_0\alpha^2(x^2+y^2)\delta z$$

如果将这种不均匀光学延迟，与一个光焦度为 P、勉强算得上是薄透镜的透镜所产生的光学延迟，即 $-P(x^2+y^2)/2$ 相比较，就会发现，“等效无穷薄透镜”的光焦度应当是 $P_e=n_0\alpha^2\delta z$。

由此推知，为了表示这块薄片的光学作用，必须采用两个矩阵

$$\mathscr{T}(\delta z)=\begin{bmatrix}1 & \delta z/n_0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \quad 和 \quad \mathscr{R}(\delta z)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -n\alpha^2\delta z & 1\end{bmatrix}$$

大概有四种不同的方式可以组合这两个矩阵。读者可以将它们组合成：

(1) $M(\delta z)=\mathscr{T}(\delta z)\mathscr{R}(\delta z)$

或

(2) $M(\delta z)=\mathscr{R}(\delta z).\mathscr{T}(\delta z)$

另一方面，也可将 $\mathscr{T}(\delta z)$ 和 $\mathscr{R}(\delta z)$ 这两个矩阵中的某一个分成两半，并分别将这两半作为左乘因子和右乘因子。因此得：

(3) $M(\delta z)=\mathscr{T}(\delta z/2)\mathscr{R}(\delta z)\mathscr{T}(\delta z/2)$

或

(4) $M(\delta z)=\mathscr{R}(\delta z/2)\mathscr{T}(\delta z)\mathscr{R}(\delta z/2)$

显而易见，这四个替换式是经过挑选的，只有式尾略有差别；这里只考虑第一和第三个替换式。

情况(1)

已知

$$M(\delta z)=\begin{bmatrix}1 & \delta z/n_0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -n_0\alpha^2\delta z & 1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1-(\alpha\delta z)^2 & \delta z/n_0\\ -n_0\alpha^2\delta z & 1\end{bmatrix}$$

这时将下面三式代入

$$K=\alpha n_0 \quad 和 \quad \theta=2\sin^{-1}(\alpha\delta z/2)$$

和 $$\alpha\delta z=2\sin(\theta/2)$$

于是得 $$M(\delta z)=\begin{bmatrix} 2\cos\theta-1 & (2\sin(\theta/2))/K \\ -2K\sin(\theta/2) & 1 \end{bmatrix}$$

经验算，这个矩阵的行列式等于 1，其矩阵迹等于 $2\cos\theta$. 所以，该矩阵的两个特征值等于 $e^{\pm i\theta}$。

求出这个"无穷薄矩阵"$M(\delta z)$后，再取其第 p 次幂，其中 p 是一个非常大的数字。于是，可以得到一个宽度有限即 $t=p\delta z$ 的薄片的光线转移矩阵。为此，可以回顾 3.5 节引证的西勒维斯特定理。若 $M=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$是一个特征值为 $e^{\pm i\theta}$ 的幺模矩阵，则

$$M^p=\begin{bmatrix} \dfrac{\sin(p+1)\theta-D\sin p\theta}{\sin\theta} & \dfrac{B\sin p\theta}{\sin\theta} \\ \dfrac{C\sin p\theta}{\sin\theta} & \dfrac{D\sin p\theta-\sin(p-1)\theta}{\sin\theta} \end{bmatrix}$$

将刚才已经推导出来的三个元素 B、C 和 D 代入上式，得

$$M(t)=[M(\delta z)]^p$$

$$=\begin{bmatrix} \dfrac{\sin p\theta\cos\theta+\cos p\theta\sin\theta-\sin p\theta}{\sin\theta} & \dfrac{2\sin p\theta\sin(\theta/2)}{K\sin\theta} \\ \dfrac{-2K\sin(\theta/2)\sin p\theta}{\sin\theta} & \dfrac{\sin p\theta-\sin p\theta\cos\theta+\cos p\theta\sin\theta}{\sin\theta} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \cos p\theta-\dfrac{\sin p\theta(1-\cos\theta)}{\sin\theta} & \dfrac{\sin p\theta}{K\cos(\theta/2)} \\ \dfrac{-K\sin p\theta}{\cos(\theta/2)} & \cos p\theta+\dfrac{\sin p\theta(1-\cos\theta)}{\sin\theta} \end{bmatrix}$$

如果现在假设 $\delta z\to 0$ 和 $p\to\infty$，使它们的乘积 $(p\delta z)=t$ 始终保持不变，则参数 θ 的特性将是，$\theta\to 0$，而 $p\theta=\alpha t$ 则保持不变。所以在上述矩阵中，$(1-\cos\theta)/\sin\theta$ 项非常小，可以忽略，$\cos(\theta/2)$十分接近等于 1。因此，最后得：

$$M(t)=\begin{bmatrix}\cos p\theta & \dfrac{\sin p\theta}{K}\\ -K\sin p\theta & \cos p\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos \alpha t & \dfrac{\sin \alpha t}{\alpha n_0}\\ -\alpha n_0\sin \alpha t & \cos \alpha t\end{bmatrix}$$

在讨论这个解的光学含义之前，我们要说明，即使从前面指出的其他替换式出发，也可以得到同样的矩阵 $M(t)$。

情况(3)

在这种情况下，无穷薄的矩阵是三个矩阵的乘积

$$M(\delta z)=\begin{bmatrix}1 & 1/2\delta z/n_0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -n_0\alpha^2\delta z & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1/2\delta z/n_0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1-1/2(\alpha\delta z)^2 & \dfrac{\delta z}{n_0}(1-(1/2\alpha\delta z)^2)\\ -n_0\alpha^2\delta z & 1-1/2(\alpha\delta z)^2\end{bmatrix}$$

和前面一样，改变同样两个参数 θ 和 K，可以将这个矩阵重新表示为

$$M(\delta z)=\begin{bmatrix}1-2\sin^2(\theta/2) & \dfrac{2\sin(\theta/2)}{K}(1-\sin^2(\theta/2))\\ -2K\sin(\theta/2) & 1-2\sin^2(\theta/2)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos\theta & \dfrac{\sin\theta\cos(\theta/2)}{K}\\ -2K\sin(\theta/2) & \cos\theta\end{bmatrix}$$

(要注意，这个矩阵的两个主对角元素现在是相同的；和前面一样，其行列式等于1，两个特征值为 $e^{\pm i\theta}$。)

再次采用西勒维斯特定理，最后得

$M(p\delta z)=M^p$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{\sin p\theta\cos\theta+\cos p\theta\sin\theta-\sin p\theta\cos\theta}{\sin\theta} & \dfrac{\sin\theta\cos(\theta/2)\sin p\theta}{K\sin\theta}\\ \dfrac{-2K\sin(\theta/2)\sin p\theta}{\sin\theta} & \dfrac{\cos\theta\sin p\theta-\sin p\theta\cos\theta+\cos p\theta\sin\theta}{\sin\theta}\end{bmatrix}$$

$$
=\begin{bmatrix} \cos p\theta & \cos(\theta/2)\dfrac{\sin p\theta}{K} \\ \dfrac{-K\sin p\theta}{\cos(\theta/2)} & \cos p\theta \end{bmatrix}
$$

再重复一次前述过程，在 $\theta\to 0$ 且 $\cos(\theta/2)$ 与 1 差不多大小的极限情况下，于是，和前面一样，这个矩阵最后变成：

$$
M(t)=\begin{bmatrix} \cos p\theta & \dfrac{\sin p\theta}{K} \\ -K\sin p\theta & \cos p\theta \end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} \cos \alpha t & \dfrac{\sin \alpha t}{n_0\alpha} \\ -n_0\alpha\sin \alpha t & \cos \alpha t \end{bmatrix}
$$

从现在起，可以用这个矩阵 $M(t)$ 表示任何种类、任何长度的介质的光学作用，无论介质长度是多长或是无穷短。除了乘积因子 αn_0 之外，矩阵 $M(t)$ 和一个"旋转矩阵"相类似，而且具有同样的特性即 $M(t_1)M(t_2)=M(t_2)M(t_1)=M(t_1+t_2)$。根据西勒维斯特定理，很容易证明 $(M(t))^N=M(Nt)$；即使 N 不是一个整数，上式也是成立的。

对这个矩阵粗加检查后表明，它具有周期性特性：在距离 $t=2\pi/\alpha$ 时，它简化为一个单位矩阵。在 $t=\pi/\alpha$ 时，它和一个放大率为 -1 的无焦系统的矩阵相类似；在 $t=\pi/2\alpha$ 时，它和一个涉及两个焦平面、光焦度为 $K=n_0\alpha$ 的透镜的矩阵相同。现在可以用这个矩阵更详细地考察：一条几何光线通过类透镜分布介质的光程，或高斯光束通过这种介质的传输问题。

3.9.1 近轴光线的传输

已知一个位于 $z=0$ 位置的输入参考平面 RP_0，和一个可以移动到任何 z 位置的输出参考平面 RP_z。于是，对任何一个给

定的输入光线$\begin{bmatrix} y_0 \\ V_0 \end{bmatrix}$，都可以列出

$$\begin{bmatrix} y(z) \\ V(z) \end{bmatrix} = M(z) \begin{bmatrix} y_0 \\ V_0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \alpha z & \dfrac{\sin \alpha z}{\alpha n_0} \\ -\alpha n_0 \sin \alpha z & \cos \alpha z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ V_0 \end{bmatrix}$$

例如，若一条光线高为 y_0 的输入光线平行于光轴进入到光学系统，则因为 $V_0=0$，就得

$$y(z) = y_0 \cos \alpha z$$

和 $$V(z) = -y_0 n_0 \alpha \sin \alpha z$$

或因为 $$v(z) = V(z)/n_0$$

$$v(z) = -y_0 \alpha \sin \alpha z$$

（当然，$v(z) = dy(z)/dz$）。

应当指出，无论什么时候，只要 z 为 $\pi/2\alpha$ 的奇数倍，这条光线的 y 坐标就等于零，它与光线进入到输入平面的光线高 y_0 无关；反之，只要 z 为 $\pi/2\alpha$ 的偶数倍，v 就等于零，此时，光线再次与光轴平行地行进。

因此，根据几何光学模型，一束平行的输入光束将以 $\Delta z = \pi/\alpha$ 的间隔周期性地聚焦成一个点，然后再重新加以准直。图 3.18 示意了这种状况。

但是，由于衍射效应，光束在“交点位置”上的聚焦决不会是完美的锐聚焦。若 y_m 为光束在 $z=0$ 位置上的最大半径，则在“焦点区域”$z=\pi/2\alpha$ 上的最大 V 值为 $V_m = n_0 \alpha y_m$；所以，如 3.3 节所述，可以预料，在这一个点上的光束直径至少为 $0.61\lambda/(n_0 \alpha y_m)$。因此，两束分别在 $z = m\pi/\alpha$ 和 $z=(2m+1)\pi/2\alpha$ 位置上的光束直径的乘积，近似等于 $(2y_m)(0.61\lambda)/(n_0 \alpha y_m)$，或

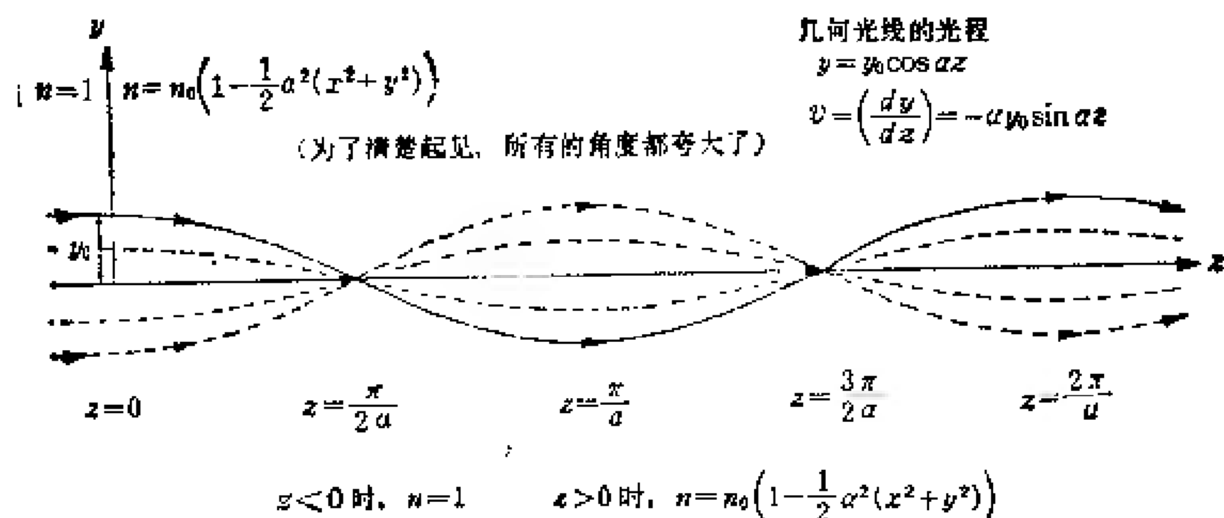


图 3.18

$1.22\lambda/n_0\alpha$。这是一个重要的极限情况，图 3.18 所示的光线图解具有理想化的几何图形。

3.9.2 高斯光束的传输

为了继续研究高斯光束通过一个类透镜介质的传输过程，我们只需应用 $ABCD$ 法则就行了。四个系数 A、B、C 和 D 都是前面已得到的 z 的已知函数。因此，若 q_0 表示输入光束在平面 $z=0$ 上的复曲率参数，则

$$q(z)=\frac{A(z)q_0+B(z)}{C(z)q_0+D(z)}$$

同理，倘若只对光斑半径 w 如何随通过介质的距离而变化感兴趣，那就可以使用光斑变换公式

$$\left(\frac{w(z)}{w(0)}\right)^2=|A(z)+B(z)/q_0|^2$$

在输入光束的颈部位于 $z=0$ 的情况下，可以立即得 $w(0)=w_0$ 和 $1/q_0=i\lambda/\pi w_0^2$，所以

$$w(z)^2=w_0^2\left(A(z)^2+\frac{B(z)^2\lambda^2}{\pi^2 w_0^4}\right)$$

$$=w_0^2\left(\cos^2\alpha z+\frac{\sin^2\alpha z\lambda^2}{\pi^2\alpha^2 n_0^2 w_0^4}\right)$$

$$=w_0^2\left[1+\frac{\lambda^2-\pi^2\alpha^2n_0^2w_0^4}{\pi^2\alpha^2n_0^2w_0^4}(\sin^2\alpha z)\right]$$

上述公式表明，除非 $\lambda^2=\pi^2\alpha^2n_0^2w_0^4$，否则，光束半径只在两个极值之间上下变动。一个极值在 $\sin\alpha z=0$ 时发生，这时，光束半径刚好等于 w_0；另一个极值在 $\sin^2\alpha z=1$ 时发生，这时，光束半径为 $w(z)=w_0(\lambda/\pi\alpha n_0w_0^2)=(\lambda/\pi\alpha n_0w_0)$。

若 $\pi\alpha n_0w_0^2>\lambda$，则第二个极值为极小值，如图 3.19a 所示。若 $\pi\alpha n_0w_0^2<\lambda$，则第二个极值为极大值，如图 3.19b 所示。若 $\pi\alpha n_0w_0^2=\lambda$，则 $\sin^2\alpha z$ 的系数等于零，而且在所有的距离上，光束半径都保持其原始值不变，如图 3.19c 所示。显然，在第三种情况下，输入光束与类透镜分布的"高斯基模"严格匹配。这个基模的光束半径由 $w_f=(\lambda/\pi\alpha n_0)^{1/2}$ 给出，相应的输入 q 值则为 $q_0=-i\pi w_f^2/\lambda=-i/\alpha n_0$。

当然，将 q 值作为矩阵 $M(z)$ 的特征矢量比进行计算，可以更直接地推导出这个 q 值。只要略加检查就能得到：

$$q_0=\frac{\lambda_1-D}{C}=\frac{e^{i\alpha z}-\cos\alpha z}{-\alpha n_0\sin\alpha z}=-(i/\alpha n_0)$$

应该指出，即使输入光束与这个基模不匹配，在光束直径的起伏总是保持相同的区域之间，最小的光束直径与最大的光束直径两者的乘积也应等于

$$(2w_0)(2\lambda/\pi\alpha n_0w_0)=4\lambda/\pi\alpha n_0=(2w_f)^2=1.27(\lambda/\alpha n_0)$$

上式与前面根据爱里公式对均匀光束所算得的结果十分接近。不过，这种接近有点偶然性，因为两者所用的表示光束直径的判据是不同的。

关于这个课题有许多门类。例如，在气体透镜系统中常常发生这种情况：系数 α 不是常数，而是随传输方向而变化的。也有可能 α 是一个纯虚数，在这种情况下，介质的性质很象一个行

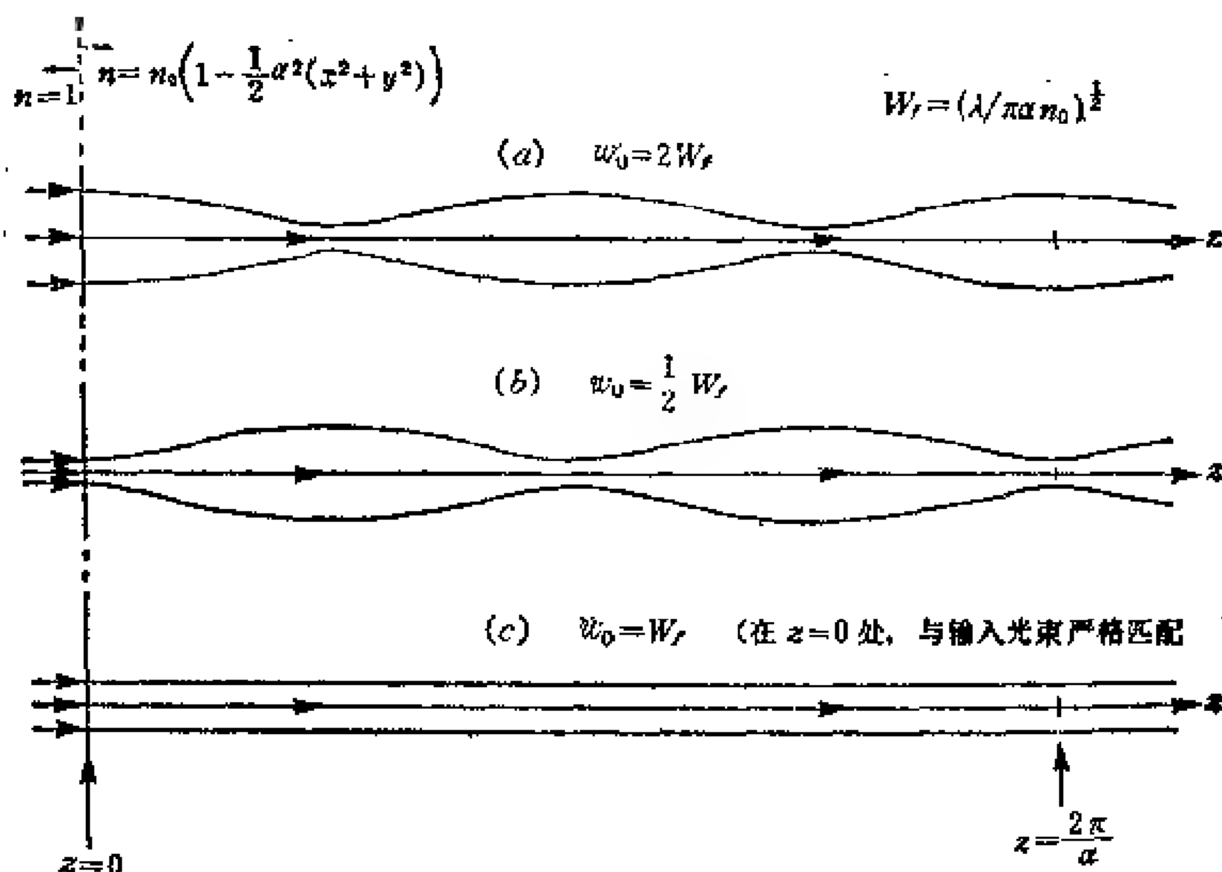


图 3.19

波不稳定谐振腔。若$a=i\alpha$,则折射率分布方程变成

$$n(z)=n_0(1+1/2a^2r^2)$$

表示这个介质的矩阵就变成

$$M(z)=\begin{bmatrix}\cos haz & \dfrac{\sin haz}{an_0}\\ -an_0\sin haz & \cos haz\end{bmatrix}$$

由于连续激光器的作用,即使在相当短的时间尺度内,也可以产生这一类“负”类透镜分布。如果有几千焦耳的能量透过介质,那么,任何剩余吸收所产生的加热作用，都会减小介质在中央区域的折射率。通常称这个过程为“热透镜效应”，它与自聚焦效应正好相反。对一个吸收给定的介质，温度的最初增长不仅与光束的强度和宽度都有关，而且与光束的半径也有关；不过,在涉及到大气传输时，也许要将风、湍流和对流等因素的复

杂作用全都考虑进去。

上述问题表明，不能期望利用光线转移矩阵解答所有的出现折射率连续分布的问题。只有当分布仍是类透镜分布，并且光束的几何形状仍是高斯型时，这些光线转移矩阵才是适用的。

本章包含有关类透镜介质的内容，也许还有另外一个原因。我们相信，这些内容是一个有启发性的例子，有助于鼓励学生去寻找光学和其他学科之间经常出现的某些类似的问题。在这种情况下，我们尤其注意电子工程领域中的问题。

从一个含有有限几个透镜的光学系统，发展到一个连续分布的光学系统，人们所取得的飞跃和一个从多节滤波器(它有成堆的电感和电容)发展到一个连续传输线所取得的飞跃十分相似。具有普遍意义的是，在光通讯中，不管是稳定腔还是不稳定腔，其特征值都确定了电信号相位的变化或电信号的衰减。对电子工程师来说，特征矢量比不是表示一个自重复的光波图样中的 R 值或 q 值，而是一个电压-电流比，即重迭阻抗。随着激光器本身的发明，对这种相似事件的探索常常是富有成果的，不过，必须小心考虑它们之间的相似点和不同点。

本章的最后一节将考虑几个例题；这些例题对已涉及到的某些基础概念可以起概括作用。有关进一步阅读光线转移矩阵的建议附在本书的末尾。

3.10 例　　题

例题 1　假定有人给你一个密封的光学系统，请问如何确定该系统的光线转移矩阵 $M_0=\begin{bmatrix}A_0 & B_0\\ C_0 & D_0\end{bmatrix}$ 中的各个元素。只允许你做唯一一件事，即在系统的前边和后边任意一边或两边都附加一个准薄透镜，这两个透镜的光焦度 P_1 和 P_2 是已知的。能

够提供测量用的唯一装置，是一台与测高仪装在一起的、发散角已知的远距离光源。你可以用它来测量四种可能组合的情况中的每一种的等效焦距，结果都是 $f=-1/C$。

若 C_0、C_1、C_2 和 C_{12} 分别表示已测得的四个 C 值，试证明该矩阵的解必须是

$$\begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{C_0-C_2}{P_2} & \dfrac{C_{12}+C_0-C_1-C_2}{P_1P_2} \\ C_0 & \dfrac{C_0-C_1}{P_1} \end{bmatrix}$$

解：在光学系统的两边都加上透镜的情况下，修正后的光线转移矩阵显然是

$$\begin{bmatrix} A_{12} & B_{12} \\ C_{12} & D_{12} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P_2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P_1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P_2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_0-B_0P_1 & B_0 \\ C_0-D_0P_1 & D_0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} A_0-B_0P_1 & B_0 \\ -P_2(A_0-B_0P_1)+(C_0-D_0P_1) & -P_2B_0+D_0 \end{bmatrix}$$

因此，当两个透镜都加上时，测得的 C 值由下式给定

$$C_{12}=B_0P_1P_2-D_0P_1-A_0P_2+C_0$$

若只在系统的前边加一个透镜，且必须令 $P_2=0$，则得

$$C_1=\qquad -D_0P_1\qquad +C_0$$

若只在系统的后边加一个透镜，且必须令 $P_1=0$，则得

$$C_2=\qquad\qquad -A_0P_2+C_0$$

于是，得到所需要的解：

$$A_0=\frac{C_2-C_1}{P_2},\quad D_0=\frac{C_0-C_1}{P_1}$$

和

$$B_0=\frac{C_{12}+C_0-C_1-C_2}{P_1P_2}$$

在刚才讨论的实验程序中，只需要两个辅助透镜。另一方面，如果可以使用几个参数已知的薄透镜，那就可以测量一系列的与透镜光焦度 P_1 和 P_2 成函数关系的 C 值。因为在每一种情况中，都是 $C=B_0P_1P_2-D_0P_1-A_0P_2+C_0$，所以，可以将总矩阵表示成偏导数形式：

$$\begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{-\partial C}{\partial P_2} & \dfrac{\partial^2 C}{\partial P_1 \partial P_2} \\ C_0 & \dfrac{-\partial C}{\partial P_1} \end{bmatrix}$$

（这个结果几乎有100年的历史了。L. 彭德伯里（L. Pendlebury）在他的“仿效高斯方法处理透镜和透镜系统” Deighton and Bell, Cambridge, 1884, PP. 55 and 91. 一书中已得到了这个结果，不过，他的结果与上式稍许有点不同。）

例题 2 有两个有界球面波，它们的有关光锥分别从两个独立的轴向像点 O 和 O' 发出。令光线矢量 $\begin{bmatrix} y \\ V \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} y' \\ V' \end{bmatrix}$ 分别表示在一个给定的参考平面上两个光锥中的两条极端光线。

试证明，在两条边缘光线相交的平面上（因而，两个波面所辐照的面积是相同的），两个光波的弧矢之间的差等于矩阵 $\begin{bmatrix} y & y' \\ V & V' \end{bmatrix}$ 的行列式的一半。

若用完全相反的光线矢量 $\begin{bmatrix} -y \\ -V \end{bmatrix}$ 代替边缘光线矢量 $\begin{bmatrix} y \\ V \end{bmatrix}$，试证明可以找到另一个被两个波面占据相同面积的平面。试求第二个交点平面的弧矢差，并解释这个弧矢差符号改变的物理含义。

解：(a) 图 3.20a 示意了从 O 点发出的一个光线矢量

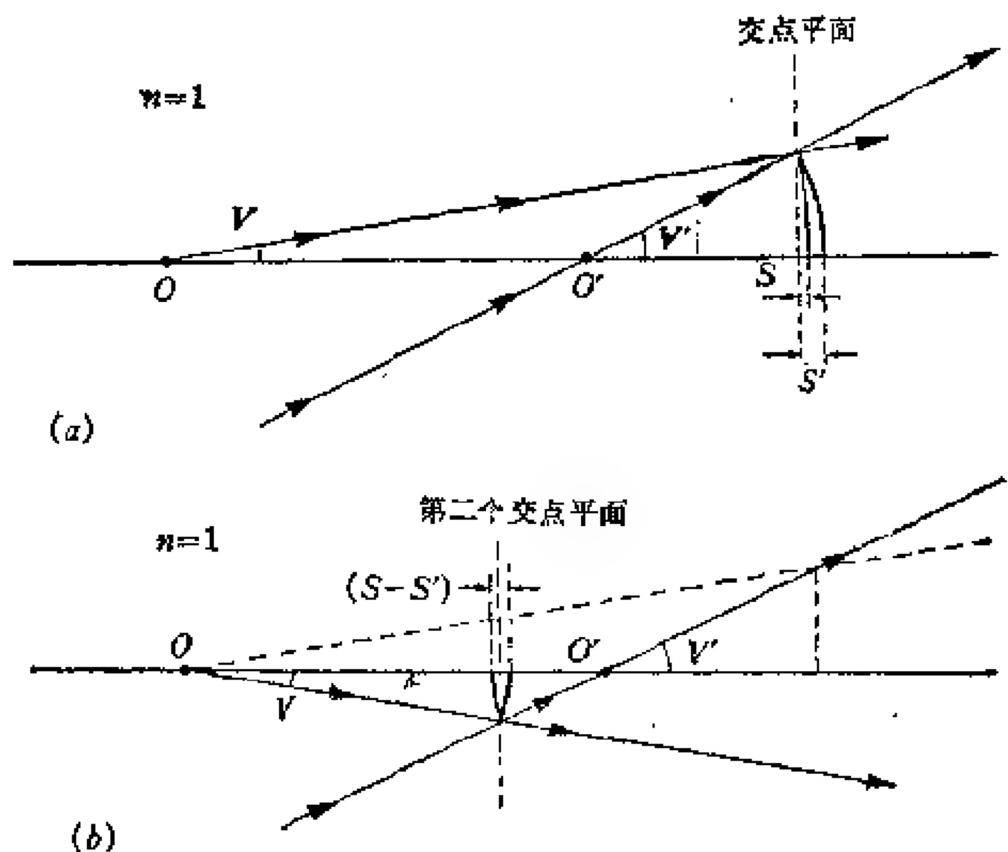


图 3.20

$\begin{bmatrix} y \\ V \end{bmatrix}$和另一个从$O'$点发出的光线矢量$\begin{bmatrix} y' \\ V' \end{bmatrix}$。为了确定这个两条光线相交的平面的位置，必须寻求一个$\mathscr{T}$矩阵，以便使$\begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ V \end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y' \\ V' \end{bmatrix}$两者都产生相同的$y$值。

换言之，现在需要

$$y+TV=y'+TV'$$

因此

$$T=\frac{(y-y')}{(V'-V)}$$

（显然，只有当$V\neq V'$时，上式才有意义。）在与给定的参考平面的右侧相距为T的交点平面上，共享y值为

$$y+\frac{V(y-y')}{(V'-V)}=\frac{(yV'-y'V)}{(V'-V)}$$

两个与该交点平面有关的矢量分别为

$$\begin{bmatrix} \frac{(yV'-y'V)}{(V'-V)} \\ V \end{bmatrix} \text{ 和 } \begin{bmatrix} \frac{(yV'-y'V)}{(V'-V)} \\ V' \end{bmatrix}。$$

由于两条光线的 V 值不相同，所以，两个与光线矢量有关的球面波应当具有不同的曲率半径和不同的弧矢。记得在 3.2 节中，曾将弧矢计算为 y 值和 V 值两者的乘积的一半，由此可得弧矢差的方程为：

$$\begin{aligned} S'-S &= O' \text{ 波的弧矢} - O \text{ 波的弧矢} \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{(yV'-y'V)}{(V'-V)}(V'-V) \\ &= \frac{1}{2}(yV'-y'V) = \frac{1}{2}\det\begin{bmatrix} y & y' \\ V & V' \end{bmatrix} \end{aligned}$$

从上例可以看到，从 O' 点发出的第二个波面有较大的弧矢或较大的发散度；并且因为 $V'>V$，所以其行列式应当是一个正数（在任何一个参考平面上都是如此）。

(b) 图 3.20b 示意了用完全相反的光线矢量 $\begin{bmatrix} -y \\ -V \end{bmatrix}$ 代替 $\begin{bmatrix} y \\ V \end{bmatrix}$ 时的情况。新的交点平面与参考平面右侧相距一段距离为 $(-y-y')/(V'+V)$，换言之，它与参考平面左侧相距 $(y+y')(V+V')$。

在这个交点上的公共 y 值为 $(-yV'+y'V)/(V'+V)$，因此，它与 O' 波的弧矢的差为

$$\begin{aligned} (S'-S) &= \frac{1}{2}\frac{(\ \ yV'+y'V)}{(V'+V)}(V'+V) \\ &= -\frac{1}{2}\det\begin{bmatrix} y & y' \\ V & V' \end{bmatrix} \end{aligned}$$

它与上一个 $(S'-S)$ 的符号相反。

如图所见，当 O' 波到达交点平面时，尚未到达轴点 O'，并且是明显地会聚的。另一方面，O 波的发散度比图 3.20a 所示的交点区略大些。

值得注意的是，对于任何处在空气中并沿着 z 轴方向传输的有界球面波，其弧矢 S 随距离 z 的变化速率是恒定的。若 V 表示光线的极限夹角(N. A.)，则这种变化速率由下式给定：

$$\frac{(dS)}{(dz)}=\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{2}yV\right)=\frac{1}{2}V(dy/dz)=\frac{1}{2}V^2$$

因此，对上面所讨论的两个光波，有

$$\frac{d}{dz}(S'-S)=\frac{1}{2}(V'^2-V^2)$$

两个交点平面之间的距离 Δz 为

$$\Delta z=\frac{(y-y')}{(V'-V)}+\frac{(y'+y)}{(V'+V)}=\frac{2\det\begin{bmatrix}y & y'\\ V & V'\end{bmatrix}}{(V'^2-V^2)}$$

因此，弧矢差的变化为

$$\Delta(S'-S)=\frac{1}{2}(V'^2-V^2)\Delta z=\det\begin{bmatrix}y & y'\\ V & V'\end{bmatrix}$$

正如已经计算过的那样，这种弧矢差的变化是从该行列式的值的 $-1/2$ 到 $+1/2$ 对称地改变的。

学生也许愿意证明，关于弧矢增加的相类似的公式，可以应用于高斯光束的传输。若弧矢是相对于 $1/e^2$ 轮廓线计算的，则弧矢值由式 $S=(\lambda/2\pi)(z/z_0)$ 给出，式中 z 为到光束颈部的距离，而 $z_0=\pi w_0^2/\lambda$ 为通常的共焦光束参数。如果说，几何光锥中的 V 相当于高斯光束的渐近发散角 $\lambda/\pi w_0$，那么，即使在光束颈部附近，它们也遵守同一个公式 $dS/dz=1/2V^2$。

例题 3 在一台染料激光器的往返谐振腔系统中，腔的左

端为全反射镜，其会聚的光焦度为 P_1；腔的右端为输出反射镜，其会聚的光焦度为 P_2。腔的居中区含有几块透镜元件，因此，将光线数据从左端反射镜转移到右端反射镜的转移矩阵，不再是一个简单的平移矩阵。若用 $M=\begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{bmatrix}$ 表示这个转移矩阵，试证明：算得的有关输出反射镜的往返矩阵必须取下式

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P_1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_0 & B_0 \\ C_0 & A_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P_2 & 1 \end{bmatrix}$$

解：在这个例题中需要考虑光以反方向传输通过光学系统居中区的作用。可以将这种作用设想为一系列的 $\mathscr{R}$ 矩阵和一系列的 $\mathscr{T}$ 矩阵按从左到右的次序一起相乘所得到的总矩阵 $\begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{bmatrix}$。并试图证明，若将上述矩阵按相反的次序(从右到左)一起相乘，则结果为 $\begin{bmatrix} D_0 & B_0 \\ C_0 & A_0 \end{bmatrix}$，即两个主对角元素互换，但各个元素的符号不变。

本题也可以用数学归纳法证明，即利用每一个 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{T}$ 矩阵中两个元素 A 和 D 的值总是相等这一事实来证明。不过，最好首先用光学自变数证明。

假设该系统的所有光学元件都安装在一个短的光具座上。在图 3.21a 中，示意了一条沿着 $+z$ 方向传播的输入光线 $\begin{bmatrix} y_1 \\ V_1 \end{bmatrix}$ 和一条相对应的也在 $+z$ 方向传播的输出光线

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ V_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ V_1 \end{bmatrix}。$$

图 3.21b 说明了新的光线的几何形状，即如果将整个光具座绕着其中心旋转 180°，则 y 轴和 z 轴都改变了符号，而 x 轴的符

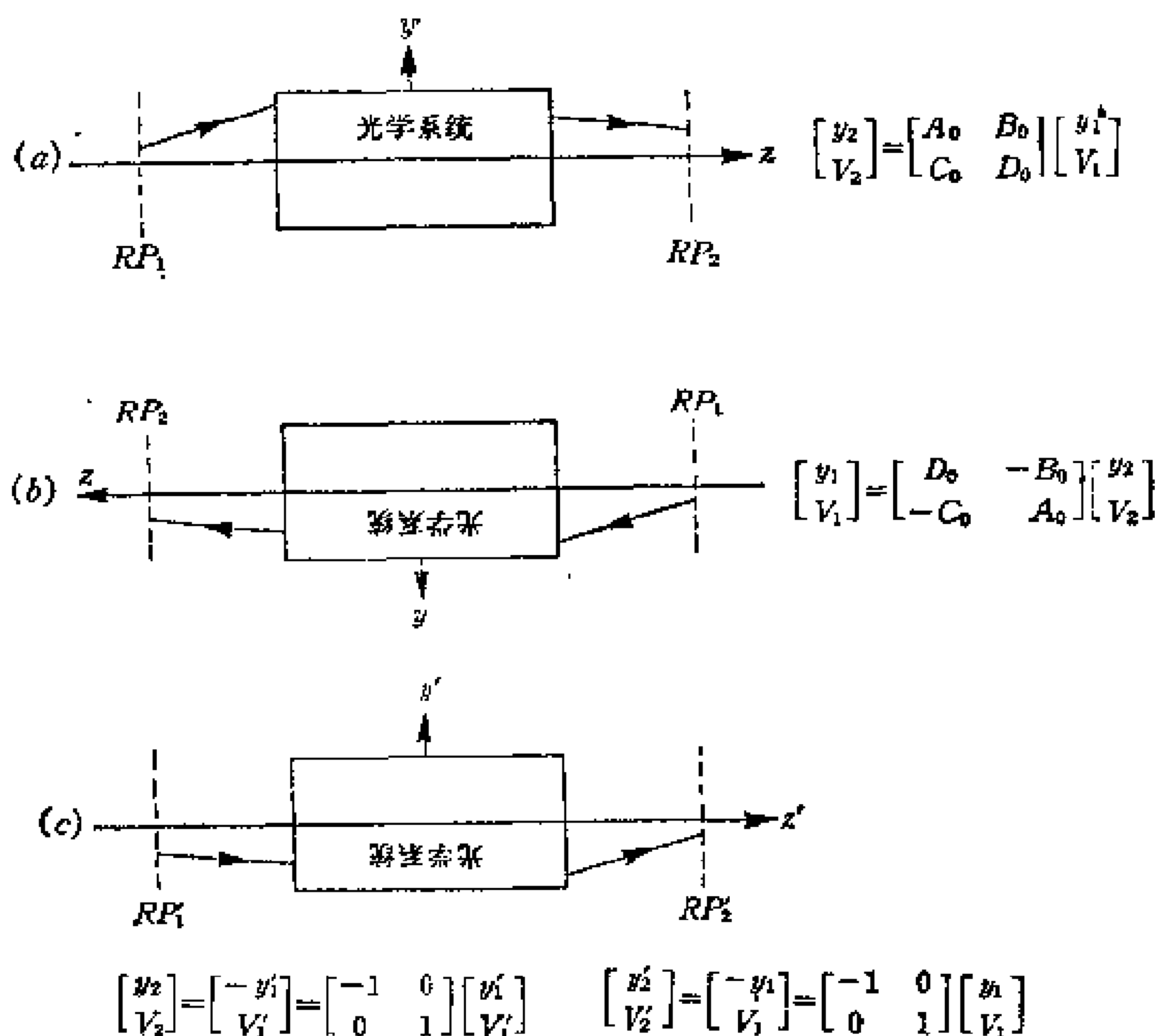


图 3.21

号保持不变。

如果现在使用一些足以表示有关新的 y' 和 z' 轴的光线矢量，那就可以使原先的输出光线的方向反向，并将它作为一条新的输入光线(见图 3.21 c)。由于光线的可逆性，新的输出光线将沿着老的输入光线的轨迹传播，在新图样的右侧出射。在各种情况中，其 V 值都不变，而 y 值则改变了符号。因此得

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_1' \\ V_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1' \\ V_1' \end{bmatrix}$$

和

$$\begin{bmatrix} y_2' \\ V_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_1 \\ V_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ V_1 \end{bmatrix}$$

请记住上述二式，并将原始的矩阵颠倒，得

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ V_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_0 & -B_0 \\ -C_0 & A_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

联立上述三个方程，最后得到新的输出—输入关系为：

$$\begin{bmatrix} y'_2 \\ V'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_0 & -B_0 \\ -C_0 & A_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y'_1 \\ V'_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -D_0 & B_0 \\ -C_0 & A_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y'_1 \\ V'_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} D_0 & B_0 \\ C_0 & A_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y'_1 \\ V'_1 \end{bmatrix}$$

如果将一个光学系统的前端与后端颠倒一下，使系统中所有透镜的表面以及间隔的顺序都颠倒过来的话，那么，上式便是这种前后颠倒了的光学系统的光线转移矩阵。它与逆矩阵十分相似，不过，如同我们所料，表示等效光焦度的矩阵元 C_0 仍具有相同的数值。用数学归纳法的另一种证明方法。令

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = M_1 M_2 M_3 M_4 \cdots M_i \cdots M_n$$

式中，每一个矩阵 M_i 都是幺模矩阵，于是，矩阵 M_i 的两个主对角元素 A_i 和 D_i 相等。令 M_B 表示“反向”乘积

$$M_B = M_n \cdots M_i \cdots M_4 M_3 M_2 M_1$$

于是，需要证明

$$M_B = \begin{bmatrix} D & B \\ C & A \end{bmatrix}$$

其矩阵链为

$$M_B \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} M = M_n \cdots M_i \cdots$$

$$M_3 M_2 M_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} M_1 M_2 M_3 \cdots \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdots M_i \cdots M_n$$

若首先计算处在居中位置上的三个矩阵的乘积，则得

$$M_1\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}M_1=\begin{bmatrix}A_1 & B_1\\ C_1 & D_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1 & B_1\\ C_1 & D_1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}A_1 & B_1\\ C_1 & D_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-A_1 & -B_1\\ C_1 & D_1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(-A_1^2+B_1C_1) & B_1(D_1-A_1)\\ C_1(D_1-A_1) & D_1^2-B_1C_1\end{bmatrix}$$

不过，因为 $A_1=D_1$ 和 $(A_1D_1-B_1C_1)=1$，所以这个矩阵可以简化为 $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，它和前面的居中位置上的矩阵相等。

以类似的方法来处理，得

$$M_2\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}M_2=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

等等，于是，最后得

$$M_B\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}M=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

若现在用 $M^{-1}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 右乘上述方程的左边，以及用等效表达式 $\begin{bmatrix}D & -B\\ -C & A\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 右乘方程的右边，则得

$$M_B\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\times M\times M^{-1}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D & -B\\ -C & A\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

于是，上式便简化为我们所需要的结果

$$M_B=\begin{bmatrix}D & B\\ C & A\end{bmatrix}$$

例题 4 采用例题 3 所考虑的谐振腔，试证明腔内的往返矩阵也可以表示成$\begin{bmatrix} A_r & B_r \\ \frac{(A_r^2-1)}{B_r} & A_r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P_2 & 1 \end{bmatrix}$，式中，$P_2$ 仍是表示输出反射镜的光焦度。

若这个谐振腔基本上以稳定腔工作，问 P_2 的允许值是多少？若采用其中的一个 P_2 值，问当激光振荡时，输出光束的波面曲率半径是多少？

解：我们一开始就注意到，矩阵$\begin{bmatrix} A_r & B_r \\ \frac{(A_r^2-1)}{B_r} & A_r \end{bmatrix}$可以看作是一个最一般的、其两个主对角元素相等的幺模矩阵。在这种情况下，该矩阵表示了一条离开参考平面 RP_2 并沿 $-z$ 方向传播的光线，向后转移回到同一个参考平面 RP_2 上；这种转移是通过谐振腔内的光学系统和左端反射镜的组合作用，即一个完整的折反射系统的作用来完成的。2.11 节已证明，这种矩阵中的两个元素 A 和 D 总是相等的。

为了证明矩阵元素 A 和 D 相等，我们不引用 2.11 节的结果，而是将例题 3 得到的三列矩阵的乘积求出来，得到

$$\begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P_1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_0 & B_0 \\ C_0 & A_0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_0 & B_0 \\ C_0-P_1D & A_0-B_0P_1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} A_0D_0+B_0C_0-B_0D_0P_1 & 2A_0B_0-B_0^2P_1 \\ 2C_0D_0-D_0^2P_1 & B_0C_0+A_0D_0-B_0D_0P_1 \end{bmatrix}$$

倘若现在分别将两个主对角元素 $A_0D_0+B_0C_0-B_0D_0P_1$ 改名为 A_r，将右上角元素 $2A_0B_0-B_0^2P_1$ 改名为 B_r，于是，就得到一个约定形式的矩阵。（这里省略了验算上述矩阵是否仍是幺模

矩阵的程序，不过，总是应该进行验算的。)

将剩下来的两个矩阵的积求出来，得到了往返矩阵：

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_r & B_r \\ \frac{(A_r^2-1)}{B_r} & A_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P_2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_r - B_r P_2 & B_r \\ \frac{(A_r^2-1)}{B_r} - A_r P_2 & A_r \end{bmatrix}$$

为了使这个矩阵表示一个稳定的谐振腔，矩阵迹$(A+D)$必须介于2和-2之间。重列条件$2>(2A_r-B_rP_2)>-2$，就会发现，P_2必须介于$2(A_r+1)/B_r$和$2(A_r-1)/B_r$之间。

例如，若将谐振腔尽可能地建成最简单的腔，即在一段约化距离T上，它只含有一块平面反射镜，则得$A_r=1$和$B_r=2T$，且P_2必须介于$2/T$和零之间。换言之，输出反射镜可以是凹的而不是凸的，其曲率半径必须不小于T(若$r_2=T$，则腔为一个半球面谐振腔)。

现在回到最一般的谐振腔情况上来。假定已满足稳定振荡的条件，当激光以基模振荡时，从输出反射镜出射的高斯光束的曲率半径由下式给出(见3.7节)

$$R=\frac{2B}{(D-A)}=\frac{2B_r}{(A_r)-(A_r-B_rP_2)}=2/P_2=r_2$$

(它就是输出反射镜的曲率半径)。换言之，如同物理考虑所指出的那样，基模振荡产生的光波，在输出反射镜的整个截面上都具有等相位面。

任何一个以稳定腔方式运转的往返系统，在它的两块端面反射镜上都满足等相位面的条件，并且有一个完整的驻波图样占据了两块端面镜之间的空间。在不稳定腔的情况下，由于在径向方向上总是有一些能量逃逸出来，因而就不满足上述条件。

如果不仅希望知道所产生的高斯光束的曲率半径，而且也希望知道其光斑半径，那么，从3.8节所用的相当冗长的算式中，就能够直接求得(见图3.17)。不过，更好的方法是求谐振腔的往返矩阵，然后再确定该矩阵的两个特征函数。按这种方式处理可以得到两个有效的验算结果：首先，谐振腔是一个稳定腔；其次，所得的 R 值与已知的输出反射镜的形状相一致。

例题5 有人请你帮助设计一个短的、密封的二氧化碳激光器，这是一个单频运转的低功率激光器。初步的技术要求表明，该激光器应当以50 cm长的稳定谐振腔为基础，并且要求输出光束是平行光束。同时也表明，θ(特征值中的相位角)的额定值应该为1 rad。问：你应将该系统的两块反射镜的曲率定为多少？放电管的直径大约为多少？

解：因为要考虑的是一个稳定谐振腔，所以，准直输出的要求直接告诉我们，输出反射镜必须是平面镜。以m为单位进行运算。将 $T=0.5$ 和 $P_2=0$ 代入一个由两块反射镜组成的谐振腔的标准矩阵中，并得到(见3.4节)

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-P_1T-2P_2T+P_1P_2T^2 & T(2-P_1T) \\ -P_1-P_2+P_1P_2T & 1-P_1T \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-\frac{1}{2}P_1 & 1-\frac{1}{2}P_1 \\ -P_1 & 1-\frac{1}{2}P_1 \end{bmatrix}$$

不出所料，该矩阵的两个主对角元素相等，并且是一个幺模矩阵。现在从条件 $(A+D)=2-P_1=2\cos\theta$ 中确定 P_1，式中角 θ 等于1 rad。因此，$P_1=0.92$ 和 $r_1=2/P_1=2.17$ (曲率半径以m为单位)。

将这个数值作为反射镜曲率，于是，往返矩阵具有数值形式：

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.54 & 0.77 \\ -0.92 & 0.54 \end{bmatrix}$$

应该指出，到目前为止尚未考虑这个激光器的工作波长。但是，为了选择激光管的直径，还需要了解将要产生的高斯基模的几何形状。

利用有关颈部半径 w_0 的公式，求得

$$w_0 = \left(\frac{(-\lambda \sin \theta)}{\pi C}\right)^{1/2} = \left(\frac{(10.6)(10^{-6})(0.842)}{(0.92)(\pi)}\right)^{1/2}$$

$$= 1.76 \times 10^{-3}\mathrm{m}, \text{ 即 } \underline{1.76\ \mathrm{mm}}$$

求得共焦参数 z_0 为

$$z_0 = (-\sin \theta / C) = \frac{0.842}{0.920} \quad 0.915\,\mathrm{m}$$

值得注意的是，若将同样的谐振腔几何结构用于可见波长激光器时，则其颈部半径 w_0 将比二氧化碳激光器的 w_0 小四倍，但共焦参数 z_0 仍然相同。

在寻求激光管的适当直径时，请记住，在谐振腔另一端上的光斑半径比在一端的略大些，两者的光斑半径关系式为：

$$w = w_0(1 + T^2/z_0^2)^{1/2} = 1.14\,w_0$$

由于光束是略微扩展的，所以，在两个 $1/e^2$ 点上测得的最大光束直径几乎恰好为 4 mm。

在大部份气体激光器中，考虑到衍射损耗和某种程度的失调，因而将放电管直径做成至少是 $1/e^2$ 点处直径的二倍。二氧化碳激光器的放电管管壁可能产生麻烦的斜反射，并且对气体稍有冷却作用，从而产生较高的增益系数。而且，被密封在管内的总的气体体积，在确定密封系统的寿命中，也是一个重要的因素。

在这种情况下，选用内径为 10 mm 的放电管较为合理，不过，把一个大于 10 mm 的放电管与一个直径为 10 mm 的光阑

连接起来使用，效果将会更好。

例题 **6** 如图 3.22 所示，用一个简单的平凸玻璃透镜，将一束直径为 2 cm 的准直激光光束聚焦，透镜的光焦度为 10 屈光度，其中心厚度为 1 cm，折射率为 1.5。请用近轴光学方法计算：由透镜两个表面的内反射所形成的任何聚焦像以及落在透镜玻璃内部的像的位置。

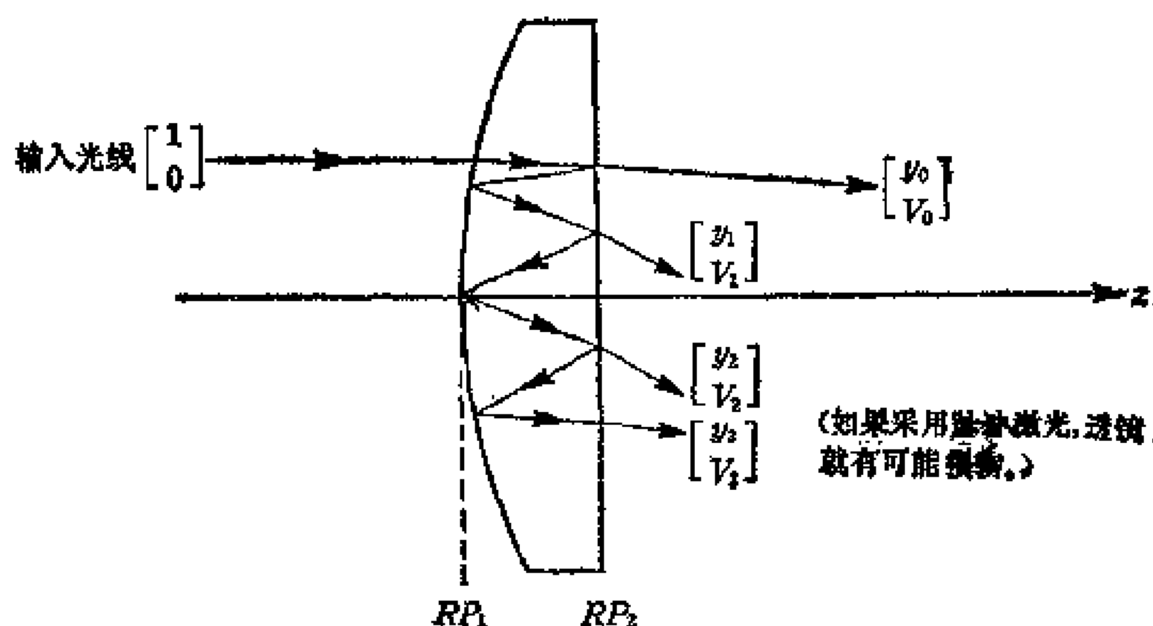


图 3.22

如果透镜不镀膜，并且忽略球差和自陷效应，问这个焦点上的光强比入射平行光束的光强大多少？

解：令 $\mathscr{R}_1$ 和 $\mathscr{R}_2$ 分别表示透镜的第一和第二表面的折射矩阵。令 $\mathscr{R}_1'$ 和 $\mathscr{R}_2'$ 分别表示相应的从玻璃一侧反射的反射矩阵。令平移矩阵 $\mathscr{T}$ 表示厚度为 1 cm 的玻璃。

在无任何内反射时，一个通过透镜的第一和第二表面的光线转移矩阵为

$$M_0=\mathscr{R}_2\mathscr{T}\mathscr{R}_1$$

另一方面，若一条光线经过 n 次内反射后在 $+z$ 方向出射，则其光线转移矩阵为

$$M_n=\mathscr{R}_2(\mathscr{T}\mathscr{R}_1'\mathscr{T}\mathscr{R}_2')^n\mathscr{T}\mathscr{R}_1$$

由于该透镜的特殊性，即第二表面是平面，则 $\mathscr{R}_2$ 和 $\mathscr{R}_2'$ 两者都可以简化为单位矩阵 I。所以，上述矩阵可以简化成

$$M_n=(\mathscr{T}\mathscr{R}_1'\mathscr{T})^n\mathscr{T}\mathscr{R}_1$$

以 cm 为单位进行运算，立即得 $r_1=5$，因而

$$\mathscr{R}_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -0.1 & 1\end{bmatrix}$$

和
$$\mathscr{R}_1'=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{2n}{r_1} & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -0.6 & 1\end{bmatrix}$$

而
$$\mathscr{T}=\begin{bmatrix}1 & t/n\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2/3\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

将上面三式代入矩阵 M_n，得

$$\begin{aligned}M_n&=\left(\begin{bmatrix}1 & 2/3\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -0.6 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2/3\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)^n\\ &\quad\times\begin{bmatrix}1 & 2/3\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -0.1 & 1\end{bmatrix}\\ &=\left(\begin{bmatrix}1 & 2/3\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2/3\\ -0.6 & 0.6\end{bmatrix}\right)^n\begin{bmatrix}0.9333 & 2/3\\ -0.1 & 1\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}0.6 & 1.0667\\ -0.6 & 0.6\end{bmatrix}^n\begin{bmatrix}0.9333 & 2/3\\ -0.1 & 1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

如果只对第 n 个像感兴趣，那么，现在就可以直接应用西勒维斯特定理。不过，在这种情况下，最好采用累加计算的方法。所以，从每一个逐次的 y_i 和 V_i 值中都可以确定出相应的 R_i 值，若 R_i 介于 0.67 和 0 之间，这就意味着，所考虑的光线在通过透镜的厚度时已经被聚焦了。反之，若 R 介于 0 和 -0.67 之间，则表明光线从透镜的平的表面上反射后，在其下一个路程中同

样会发生聚焦。

按照上述图解处理，并以一条边缘光线$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$进行运算，则可首先求得

$$\begin{bmatrix}y_0\\V_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.933\\0.1\end{bmatrix}$$

$\therefore \quad R_0=-9.33$ （确定了垂直聚焦像的位置）

$$\begin{bmatrix}y_1\\V_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.6 & 1.0667\\-0.6 & 0.6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.933\\-0.1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.4533\\-0.62\end{bmatrix}$$

$\therefore \quad R_1=-0.739$ （只比 -0.67 稍小一些）

$$\begin{bmatrix}y_2\\V_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.6 & 1.0667\\0.6 & 0.6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.4533\\0.62\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.390\\-0.644\end{bmatrix}$$

$\therefore \quad R_2=0.606$ （在玻璃内部）

$$\begin{bmatrix}y_3\\V_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.6 & 1.0667\\0.6 & 0.6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0.390\\-0.644\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.921\\-0.152\end{bmatrix}$$

$\therefore \quad R_3=6.06$

（注意，当画出来的光线引向焦点时，其 y 值要改变符号。）

因为所计算的R值表示约化半径，所以，一个二次内反射后产生的聚焦像或"波依斯点"(Boys point) 的位置，位于与透镜平的表面的左侧相距$(nR_2)=0.909$ cm 处，即位于与透镜弯曲的前表面相距约 1 mm 的地方。

对一个折射率为 1.5 的不镀膜的表面，垂直入射所反射的功率是入射功率的 0.04 倍。所以，在刚才考虑的聚焦像中，其总功率仅仅为初始光束的功率的$(0.04)^4$倍。另一方面，若像的大小达到衍射极限，则光束半径将从其初始值即 1 cm 减少到(0.61λ)/数值孔径，在这种情况下，即为$(0.61\lambda)/0.644$。（还要

指出的是，所计算的 V 值包括了介质的折射率。)

如果采用的是氦——氖激光器，那么，这个在爱里斑面积上平均分布的像中心强度将增大约 $(0.04)^4(V_2)^2/(0.61\lambda)^2=710$ 倍。(对一台巨脉冲红宝石或钕玻璃激光器而言，因为其波长较长，所以这个像中心强度稍小些，不过，它可能已足以引起电介质的击穿，从而使一个在其他方面都很完美的透镜产生灾难性的损伤。)

第四章　偏振光学矩阵法

4.1　偏振光的产生和分析

假设读者对基础光学中经常提到的偏振光已有所了解。读者知道，对于所有的电磁辐射，电场和磁场的振荡分量在方向上是相互垂直的，而且与传播方向也相垂直。如同先前一样，本章假设一组直角轴线，其 Oz 轴表示光的传播方向。在处理偏振问题时，我们忽略磁场带来的问题，感兴趣的只是电场矢量相对于横向 xy 平面是如何取向的？首先从偏振光的产生及其如何表示或分析着手。现在考虑两种极端的情况。

大多数普通光源，诸如太阳或白炽灯泡，它们发出的光都被认为是非相干的和非偏振的；这类光是由无数个独立的扰动杂乱地组成的，每个扰动都有其自身的传播方向，自身的光学频率及其偏振状态。这些“态”或“辐射场的模”怎么会不可数呢？

上一章已发现，就横模而言，一个面积为 A，在立体角 Ω 内发射辐射的光源，其传播方向上的可分辨横模模数为 $A\Omega/\lambda^2$；例如，一个面积为 1 cm²、在半个球面内发射辐射的光源，其可分辨横模模数远大于 10^8。其次，倘若考虑一个观测周期超过 1s 的光源，问在理论上，该光源至少有多少个可分辨光学频率？答案是其数值远大于 10^{14}。和这些情况相比，倘若考虑一个电磁波场的偏振的话，那么，就会发现，独立的正交态的数目正好是 2！

有时将非偏振光称为“所有各种”偏振光的杂乱混合，不过，更正确地讲，在试图分析这种非偏振问题时，根据任意选择的一对正交态，总会发现在一对正交态中，两种态的强度不相上下。

如果能足够快地进行观察的话，就会发现，“瞬时”的偏振态以统计学上的无规形式，十分迅速地通过所选定的这两种振动态的所有可能组合的振动态。在大多数情况下，发生这些变化的速率超过 10^{12} 次/秒，所以人们观察到的振动态只是一个平滑的平均值。

也许可以这样讲，非偏振光是容易产生的，但在描述它时，无论是用数学或用模式理论都是困难的。（附录 C 将讨论这一点。）

现在回过来讨论相反的情况，即回到近年来人们利用单模激光振荡器所产生的完全相干光的问题上来。虽然这种装置代表了人类发明才能的丰功伟绩，但是，它所产生的光却是可以简单表示的。假设有一个角频率为 ω 的平面波以速度 c 沿着 Oz 轴传播。既然人们知道，电场矢量 $\boldsymbol{E}$ 的两个振动分量都是横向的。那就可以分别用一个峰值振幅为 H 的 x 分量 E_x 和峰值振幅为 K 的 y 分量 E_y 来表示。于是，有

$$E_x = H\cos\left[\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)+\phi_x\right]$$

$$= H\exp i\left[\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)+\phi_x\right]\text{的实部}$$

和

$$E_y = K\cos\left[\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)+\phi_y\right]$$

$$= K\exp i\left[\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)+\phi_y\right]\text{的实部}$$

（在复指数项中，到底取 $e^{i\omega t}$ 还是 $e^{-i\omega t}$ 来表示时间变化项，这是一个习惯上的问题。本章采用 $e^{i\omega t}$ 值。）

若用记号 Δ 表示相位差 $(\phi_y-\phi_x)$，以及 $\hat{i}$ 和 $\hat{j}$ 分别表示沿

着 Ox 和 Oy 轴的单位矢量，则上述两个方程可以组合成如下的空间矢量形式：

$$\boldsymbol{E}(x,\ y,\ z,\ t)=(H\hat{i}+Ke^{i\Delta}\hat{j})\exp i\left[\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)+\phi_x\right]$$

另一方面，就本书而言，更可取的是采用列矢量形式

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} H \\ Ke^{i\Delta} \end{bmatrix}\exp i\left[\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)+\phi_x\right]$$

上述表示式与 x 或 y 都无关，这是因为所假设的是一个在横向上是无限大的平面波的缘故。（观察点在远离激光点光源的地方时，就可以得到这种近似平面波，或者干脆以极其低的频率，从一个连续波的无线电发射机中获得平面波。）

诸如 $\begin{bmatrix} He^{i\phi_x} \\ Ke^{i\phi_y} \end{bmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix} H \\ Ke^{i\Delta} \end{bmatrix}$ 的列矢量或态矢通常被称为麦克斯韦列或琼斯矢量。本书采用前一种说法，即麦克斯韦列。由此可见，麦克斯韦列完整地描述了任何一束全偏振光束的偏振状态。对于现在正在考虑的相干平面波，若 H 或 K 为零，则立即看出，横向振动必须是垂直偏振或水平偏振。若相位差 $(\phi_y-\phi_x)=\Delta$ 为零，则光是线性偏振光，若 $H=K$，而 $\Delta=\pi/2$，则光为圆偏振光。在一般情况下，则是椭圆偏振光。

要是难以设想出这些横向振动的几何图形，那可以用一个模型来帮助想象。设想，在一个给定的 xy 平面上，有一个非常小的带电粒子在运动，即该带电粒子被一个弱的弹簧系在起始点上，同时又被一个振荡电场矢量拉离原位。若将时间起始点选成使 $\phi_x=0$，并以适当的单位表示距离，那么，试验电荷偏离起始点的瞬时的 x 和 y 坐标分别按下述两个方程随时间变化：

$$x=H\cos(\omega t)$$

和

$$y=K\cos(\omega t+\Delta)$$

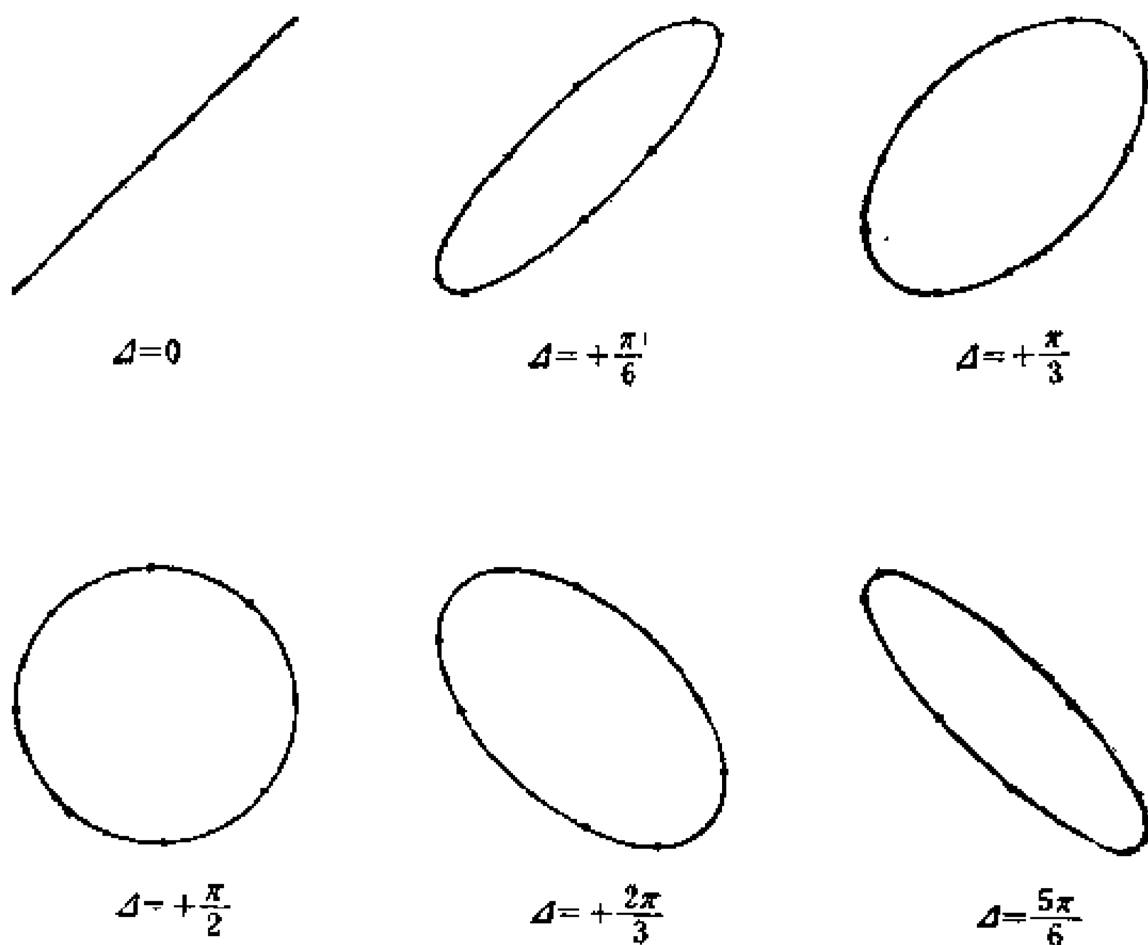


图 4.1

由此推知，无论何时，只要 ωt 从零到 2π 改变一次，(在 1 秒钟内，从零到 2π 的变化次数起码为 10^{14} 次)试验电荷就完成一次简单的利萨如图形(Lissajovs' figure)的循环。见图 1(当然，在阴极射线示波器上，用极其低的频率产生这类图形是十分简单的；为此只需将两个相同的音频正弦信号分别加到示波器的 X 和 Y 偏转放大器的输入端。控制 X 偏转，使其产生一个“XY 显示”，无需加时基显示。)

上述每一个图样都表示了振荡电场矢量顶部的轨迹。为了分析这些图形的几何结构，第一步是从上述的一对方程组中消去时间参数(ωt)。但是，在进行这一步之前，先考虑一些介于完

全相干和完全非相干这两种极端情况之间的光束，即"部分相干光"。

产生"部分相干光"主要有两种方法：

(a) 一种方法是首先用激光器。在某些科学实验中，完全相干的激光束可能是一种弊害，因为它常产生某种衍射，干涉或"斑纹"等不需要的效应。因而，偶而也有将一束激光通过一种递降相干装置，例如快速旋转的毛玻璃，以获得"准热"光束*。

(b) 然而，在极大多数情况下，则是利用普通热源所发射的非相干光，通过某些光学系统，光谱和偏振滤光片等的组合以获得部分相干光。

最简单的光学滤波器是针孔。它通过低效过程，即抑制几乎全部落在它上面四周的光束，只允许其中心部分透过光束，使光束的空间区域大大降低，从而改善光束的方向性。光谱滤光器也同样是这种浪费光能的装置。无论是一块彩色玻璃，一台采用棱镜或光栅的单色仪，还是一台干涉仪，都是仅仅依靠全部滤除落在窄谱带以外的光谱成份来改善光束的光谱纯度。

如果人们企图将平常光改善成具有接近激光器所提供的方向性和光谱纯度，那么，组合的滤光作用所引起的损耗，实际上使保留下来的有用光束的能量几乎是微乎其微了。在发明激光器之前，光学实验室所用的光要么是方向性好的，要么是单色度高的，但两者不能同时兼有。

如果实验需要全偏振光，那么，滤波作用就可能有效得多了。因为初始光仅仅分布在两个偏振态之间，因此只损耗掉光强的一半。

最有效的偏振滤光器之一是一块应用单轴晶体（例如方解石）的双折射性质制成的偏振镜。早期的偏振镜，例如尼科耳

* 译注：热光源发射的光是非相干的，准热光源发射的光是部分相干的。

棱镜（Nicol Prism），已为近代的格兰-傅科偏振器（Glan-Foucavlt)所取代，这种偏振镜更容易透过平面偏振光，其效率主要受反射损耗所限；而且，不需要的垂直偏振光将由于全内反射而几乎全部反射掉。但这类棱镜的入射光必须是近似准直的。

波拉(Polaroid)公司生产的各类偏振片，在一个很宽的波段和很大的方向角范围内都有相当高的效率。例如，HN-3型偏振片，在可见光波段，其透过率高达32%，而遗留下来的、不需要的偏振分量几乎只占万分之一。

总之，实验室获得全偏振光的最方便的办法，是首先采用激光器，或采用上述波拉公司生产的一种偏振滤光器。当然，还有几种天然产生一定偏振度的光的方法。例如，当光从一个抛光的透明表面倾斜反射，或者是光通过某些东西在接近90°方向上被一极微小的散射微粒散射时，都会产生具有一定偏振度的光。（在天文学和实验室中也存在这种情况，即在强大的定向电场或磁场的情况下所产生的光，就具有一定的偏振度，或者是其偏振度随波长明显地变化。）

在上述许多情况中，滤光作用是不完备的，因此，得到的光仅仅是部分偏振光。下节将要说明，这种光束的"偏振度"可以根据光束的"斯托克斯参数"来定义。为了便于分析，可以将部分偏振光看作是两束独立的、强度不等且偏振态相反的全偏振光的混合物。

4.1.1 平面偏振光

设想，已经将一束非偏振光通过一块偏振片转换成平面偏振光。电场矢量的振动现在完全处在横向的 xy 平面的一个方向上，并且把一个包含有该方向和传播方向 Oz 的平面称为"振动面"。那么，该如何来确定振动面的取向呢？

对于许多偏振器来说，透射光的振动面就是“通光面”，用刻字的直线或双箭头表示；倘若将偏振片做成方形，那么通光面很可能与其中的一对棱边相平行(不过，在某些实验室中，喜欢将偏振片切成 45°！)

检查偏振器的有效方法，首先是手持偏振片，并通过它来观察从一个光泽的水平表面(例如抛光的桌面)上倾斜地反射的光，并将偏振片在自身所在的平面内旋转，直到反射光尽可能完全消失。这样可以知道，因为不能透过偏振器的反射光主要是水平偏振光，所以，该偏振器的通光面必定处于垂直位置。因此，可以在它上面刻一个临时性记号，用以标记通光面基线 PP'。

为了更精确地检查这第一条线的取向，或证实这条已经标记的线 PP'，我们可以按下述步骤进行。将第一个偏振器安装在水平放置的光具座上，并将其基线 PP' 精确地调成垂直(或水平)方向。然后将第二个偏振器插入到灯泡一边或观察者这一边，再旋转该偏振器，直到透射光尽可能完全消失。

现在第二个偏振器维持不变，但将第一个偏振器的前端面与后端面互换，并将其基线 PP' 的取向仍调成和原先一样。如果基线 PP' 已和第一个偏振器真正的通光面相一致，那么，视场将再次变暗；但倘若还有相当强的光透过第二个偏振器，那就必须将第一个偏振器略为旋转，直到发现一个新的“消光”位置。再在该偏振器上刻上第二条线，用以标记消光位置。这样，第一个偏振器通光面的精确位置就处在这两条标记线之间的正中。

用这种方式检查偏振器后，现在就可以用记号 θ 表示一个由出射光的振动面与水平的 x 轴所成的夹角。于是，两个决定横向电场两个分量的方程分别为：

$$E_x = A\cos\theta\cos(\omega t+\phi)$$

和

$$E_y = A\sin\theta\cos(\omega t+\phi)$$

(这两个方程和那些用于描述全相干激光束的方程相类似;然而,这里所用的光包含有各种不同的方向和不同的频率,而且振荡场的振幅 A 和相位角 ϕ 实际上都不是常数。这两个方程都是横向位置和时间自变量的函数,该函数在其平均值附近迅速而无规地上下变化。在距离和时间这二者都基本保持是常数的情况下,有时将这种距离和时间分别称为光束的"相干宽度"和"相干时间"。因此,严格地讲,应该将横向平面上的每一个位置(x, y)写成

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}(x, y) = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} A(x, y, t)\cos\{\omega t+\phi(x, y, t)\}$$

然而,就麦克斯韦列而言,上下起伏仅仅发生在一个对两个分量起同等作用的纯量乘积上。总之,在许多情况下,相位角 ϕ 及其上下起伏是无关紧要的,于是,可以用恒定的均方根值 A 来代替 $A(x, y, t)$。)

现在再来考虑假设的微小试验电荷的运动问题。在这对同步的电场矢量的影响下,试验电荷的位移由下述两个方程给出

$$x = A\cos\theta\cos(\omega t+\phi) \text{和} y = A\sin\theta\cos(\omega t+\phi)$$

用 $\sin\theta$ 与第一个方程相乘,$\cos\theta$ 与第二个方程相乘,立即得到横向位移的轨迹方程,即 $x\sin\theta = y\sin\theta =$ 振动面内一条直线运动。

4.1.2 椭圆偏振光

产生椭圆偏振光的一种常规方法,是将一束平面偏振光通过一块"相板"即一块单轴晶体。如第五章所述,这样一块薄片使平行和垂直于单轴晶体的某一个特殊方向(称为光轴)的两个

振动分量之间产生了相位差。一个平行于光轴的振动称为“非常”振动即 E 振动，另一个垂直于光轴的振动称为“平常”振动即 O 振动。大多数相板(倘若用负的单轴晶体制做)，其 E 振动的折射率小于 O 振动的折射率，因此，这种光轴也称为“快轴”。在标记相板的取向时，最好在支架上标上一条与快轴相平行的线。(为了检查这个标记，可以采用如同检查偏振器取向时所用的方法及其校正程序，即将相板放在一对正交的偏振器之间，然后将其左右旋转，以确定消光位置。)

假设所用相板的光轴与 x 轴平行，而且相板的厚度使 O 振动比 E 振动超前一个 Δ 弧度的角度。(在这种情况下，“快”轴与 x 轴成 90°。)于是，经相板后出来的两个振动分别为：

$$x = A\cos\theta\cos\omega t \text{ 和 } y = A\sin\theta\cos(\omega t+\Delta)$$

若消去这两个方程中的 ωt，则一个将合成光束中 x 与 y 振动联系起来的方程是

$$\frac{x^2}{A^2\cos^2\theta} - \frac{2xy\cos\Delta}{A^2\sin\theta\cos\theta} + \frac{y^2}{A^2\sin^2\theta} = \sin^2\Delta$$

即
$$\frac{x^2}{H^2} - \frac{2xy\cos\Delta}{HK} + \frac{y^2}{K^2} = \sin^2\Delta$$

式中，$H = A\cos\theta$ 以及 $K = A\sin\theta$。其中，H 是一个平行于 x 轴的初始振动分量，K 是另一个平行于 y 轴的初始振动分量。将 H 和 K 分别平方，并将两者相加，得 $H^2+K^2=A^2$，即等于初始振动的振幅的平方。也就是说，它与初始振动的能量流成正比，我们将它称为强度 I(，更恰当的叫法是辐照度)。

现在来看看这个方程的某些特殊情况。若 $\Delta=0$，即若无相板，则 $\cos\Delta=1$ 和 $\sin\Delta=0$，于是该方程变成

$$x^2/H^2 - 2xy/HK + y^2/K^2 = 0$$

即
$$(x/H - y/K)^2 = 0$$

亦即 $$y/x=K/H$$
它正好描述了初始光束的平面偏振状态。现在假设有一块"半波"片，此时 $\Delta=\pi$，因此 $\sin\Delta$ 为零，而 $\cos\Delta$ 为 -1。所得的方程除了符号有所改变以外，其他都相类似，所以

$$y/x=-K/H$$

这表明，有半波片后，平行于两条轴线的位移量之比和无相板时的结果相同，只是符号相反。于是，当 x 处于正的最大值时，y 则处于负的最大值，反过来也是如此。现在仍然是平面偏振光，不过，其振动位于光轴的另一侧，并与光轴成 θ 角，这就是说，半波片已使得振动面旋转了一个 2θ 的角度。

现在假设 $\Delta=\pi/2$，即有一块"1/4 波"片。这意味着 $\cos\Delta=0$ 和 $\sin\Delta=1$，于是，这个连接 x 和 y 的方程变成

$$\frac{x^2}{H^2}+\frac{y^2}{K^2}=1$$

这是一个众所周知的长轴和短轴分别平行于 x 和 y 轴的椭圆方程。和 x 轴相平行的半轴是 H，和 y 轴相平行的半轴是 K。若 $\theta=45°$，则 H 和 K 相等，于是上述方程变成

$$x^2+y^2=A^2/2$$

因此，这是圆偏振光。

倘若通过一个偏振器来观察一束全偏振光，并且逐渐地将偏振器旋转 360°，那么，便可十分容易地在实验上把线偏振光、椭圆或圆偏振光这三者区分开来。线偏振光只有在该偏振器的两个取向上才发生，这时透射光完全相失。一束椭圆偏振光会出现两个最大和两个最小的强度，不过，最小强度时并不是全暗。而一束圆偏振光的亮度则始终保持不变。

任何椭圆或圆偏振态都称为"右旋"偏振或"左旋"偏振。对右旋偏振，y 振动的相位角 Δ 使得 x 振动必须介与零和 π 之间。

在那种情况下，当一个观察者从$+z$方向对着光源看去时，电场矢量的顶部以顺时针方向绕着其椭圆轨迹运动，见图 4.1。

4.2 用斯托克斯参数表示偏振

从一个描述x和y振动的方程中消去ωt，所得的初始方程表示一种更一般性的椭圆偏振光，它的两个半轴与x和y轴都不平行。为了求得这种情况下的椭圆偏振光的取向，以及长短轴之比，我们采用一种比迄今所用过的更完善的数学描述。用H，K和Δ三个量来表示一个纯偏振态，并将光束的四个斯托克斯参数分别定义如下：

$$I=H^2+K^2=A^2$$

$$Q=H^2-K^2=A^2\cos^2\theta-A^2\sin^2\theta=A^2\cos 2\theta=I\cos 2\theta$$

$$U=2HK\cos\Delta=2(A\cos\theta)(A\sin\theta)\cos\Delta=A^2\sin 2\theta\cos\Delta$$
$$=I\sin 2\theta\cos\Delta$$

$$V=2HK\sin\Delta=I\sin 2\theta\sin\Delta$$

用基础代数可以证明：对于全偏振光，则$I^2=Q^2+U^2+V^2$。后面将会看到这些参数的物理含义。

从定义的四个方程中可以看到

$$H^2=(I+Q)/2$$

$$K^2=(I-Q)/2$$

$$\sin^2\Delta=V^2/4H^2K^2=V^2/(I^2-Q^2)$$

于是，表示振动的方程变为

$$\frac{2x^2}{(I+Q)}-\frac{4Uxy}{(I^2-Q^2)}+\frac{2y^2}{(I-Q)}=\frac{V^2}{(I^2-Q^2)}$$

即

$$\frac{2x^2(I-Q)}{V^2}-\frac{4Uxy}{V^2}+\frac{2y^2(I+Q)}{V^2}=1$$

若

$$P=\frac{2(I-Q)}{V^2},\quad G=\frac{2U}{V^2}\ 和\ F=\frac{2(I+Q)}{V^2}$$

则得方程

$$Px^2-2Gxy+Fy^2=1$$

现在可以很容易地求出这个椭圆的取向以及长短轴之比。在极坐标中，若$(R,\ \phi)$表示一个其笛卡儿坐标为$(x,\ y)$的点，则$x=R\cos\phi$ 和 $y=R\sin\phi$，于是，该方程变为

$$PR^2\cos^2\phi-2GR^2\cos\phi\sin\phi+FR^2\sin^2\phi=1$$

采用两个众所周知的 $\cos 2\theta$ 和 $\sin 2\theta$ 公式，上式化为

$$PR^2(1+\cos 2\phi)/2-GR^2\sin 2\phi+FR^2(1-\cos 2\phi)/2=1$$

而 $2\phi=\beta$ 和 $2/R^2=W$，于是

$$W=(P+F)-2G\sin\beta+(P-F)\cos\beta$$

在椭圆的长、短轴的两端，R 分别为最大和最小，所以 W 也分别为最小和最大。对应于椭圆长短轴的 β 值由 $dW/d\beta=0$ 给出：

$$dW/d\beta=-2G\cos\beta-(P-F)\sin\beta$$

所以，若 α 是对应于椭圆一条轴的 β 值，则

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2G}{F-P}$$

式中，α 有两个可能的数值。

α 为一连串的差值为 π 的角度，其正切值是固定的，因此，若取 α 角为零到 2π 之间，且 α_1 为较小角，α_2 为较大角，则 $\alpha_2=\alpha_1+\pi$，这样 $\sin\alpha_2=-\sin\alpha_1$ 和 $\cos\alpha_2=-\cos\alpha_1$。所以，若 W_1 和 W_2 是 $2/R^2$ 的两个相应值，

$$\frac{R_2^2}{R_1^2}=\frac{W_1}{W_2}=\frac{(P+F)-2G\sin\alpha_1+(P-F)\cos\alpha_1}{(P+F)-2G\sin\alpha_2+(P-F)\cos\alpha_2}$$

代回到以斯托克斯参数表示时，发现椭圆的一条轴线与 x

轴所构成的较小的角度 $\alpha/2$，由下面方程给出

$$\tan\alpha=2G/(F-P)=U/Q=\tan 2\theta\cos\Delta$$

而短轴长度的平方和长轴长度的平方之比，经过某些简化后变成：

$$\frac{I-\sqrt{(Q^2+U^2)}}{I+\sqrt{(Q^2+U^2)}}=\frac{1-\sqrt{(1-\sin^2 2\theta\sin^2\Delta)}}{1+\sqrt{(1-\sin^2 2\theta\sin^2\Delta)}}$$

可以用两块偏振片，一块相板和一个光电池从实验上来验证这些关系式。

刚才得到的这些方程组将单束全偏振扰动的斯托克斯参数和相应的麦克斯韦列联系了起来。但是，两个元素 H 和 K 分别表示振荡电场两个矢量的振幅，它们不能在光学频率上直接观察，而斯托克斯参数则与我们用光电池就能测出的实际能量成线性关系，光电池测到实际上的是光的强度或强度差。（在5.4 节中将讨论到这些测量。）

从这种特征出发，可以得到下面的两个重要推论，当我们打算将两束或更多束已知其偏振态的光束组合起来，并希望预言这种合成光束的偏振态时，就可以应用这两个推论：

（a）倘若需要组合的扰动是"互相相干的"，那么，必须将它们的麦克斯韦列相加，以预示合成光束的麦克斯韦列。（这种情况相当于"振幅相加"，它主要来自一个全补偿干涉仪发出的光束，或者是激光束。）

（b）反之，倘若将要组合的扰动是"互不相干的"，那么，必须将它们的斯托克斯列相加，以计算合成光束的斯托克斯列。这种情况经常会遇到，它相当于"强度相加"。例如，在处理非偏振光或只是部分偏振光束的问题时，就要这样进行计算。在那种情况下，H，K 以及 Δ 的有效值都是通过在有限时间内的测量统计平均而得到的。这种情况的数学分析见附录 C。

但是，附录 C 中指出，只要是全偏振光，就必须有 $I^2=Q^2+U^2+V^2$，而完全非偏振光的三个分量 Q, U 和 V 则应当全都为零，只留下强度参数 I 不等于零。

现在来定义"偏振度"P，它表示一束部分偏振光的偏振程度的大小，P 等于比率 $(Q^2+U^2+V^2)/I^2$ 的正平方根。任何实际存在的光束，其 P 值都介于 1 和零之间。

如果希望的话，也可以将一束部分偏振光分解成两束独立的光束，其中一束为全偏振光，而另一束则为完全非偏振光。显然，从这个分解中，可以得到

$$\begin{bmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} PI \\ Q \\ U \\ V \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1-P)I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

然而，在许多情况下采用另一种方法更加方便，即把一束部分偏振光分解成两束偏振态完全相反的全偏振光。这时假定 P 不等于零，则可得：

$$\begin{bmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{bmatrix} = \frac{(1+P)}{2P} \begin{bmatrix} PI \\ Q \\ U \\ V \end{bmatrix} + \frac{(1-P)}{2P} \begin{bmatrix} PI \\ -Q \\ -U \\ -V \end{bmatrix}$$

其中

$$PI=(Q^2+U^2+V^2)^{1/2}$$

倘若 P 为零，那么，我们处理的就是完全非偏振光，此时，可将它看成是一束经过仔细选择的，一对偏振态恰好相反，其强度占原光束各半的两束光的混合光。

应当指出，对强度为1 的全偏振光，只要参数 Q,U 和 V 的三者平方之和仍然等于 1，那么，便可将 Q, U 和 V 分别取为介于

1和−1之间的任何实数值。如果将这三个参数看作是关于一组笛卡儿坐标的三个坐标值，那么，就可以得到一个空间点(Q, U, V)的空间表示，这个空间点对应于一个半径等于1的球即庞加莱球(Poincaré sphere)上某一点的偏振态。显然，在这样一个球上，两个空间点(Q, U, V)和($-Q$, $-U$, $-V$)分别表示两个完全相反的位于这个球的一条直径上的两个端点的偏振态。(偏振光学的许多性质都可用庞加莱球进行精美的几何描述，不过，我们在这里不打算继续讨论这些问题了。)

4.3 用米勒算法变换斯托克斯列

我们现在将矩阵方法应用到这些概念上。可以将与光束有关的四个斯托克斯参数看作是一个4×1阶矩阵的四个元素，这里称该矩阵为光束的斯托克斯列，用一个粗体记号$\mathbf{S}$来表示：

$$\mathbf{S}=\begin{bmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{bmatrix}$$

(在某些书中，分别用I, M, C, S或P_0, P_1, P_2, P_3来标记这些参数。本章采用粗体记号$\mathbf{S}$来表示每个斯托克斯列，目的是使$\mathbf{S}$与正弦函数的缩写记号S区分开来。后面还要用到一些粗体记号来表示厄密共轭。)

现在来说明各种类型的装置，即一块通光面与光轴成任意夹角的偏振片，或者是一块具有任意相位延迟或快轴任意取向的相板，或者是一个象某些有机液体一样，只使偏振面扭转的旋转器。从这类装置中出射的光束，其四个斯托克斯参数分别与入射光束的四个斯托克斯参数成线性函数关系。因此：

$$I_2=M_{11}I_1+M_{12}Q_1+M_{13}U_1+M_{14}V_1$$

$$Q_2 = M_{21}I_1 + M_{22}Q_1 + M_{23}U_1 + M_{24}V_1$$
$$U_2 = M_{31}I_1 + M_{32}Q_1 + M_{33}U_1 + M_{34}V_1$$
$$V_2 = M_{41}I_1 + M_{42}Q_1 + M_{43}U_1 + M_{44}V_1$$

式中，标有下标 1 的斯托克斯参数表示入射到这类装置以前的光束，下标 2 表示从装置出射的光束参数，有两个下标的 M_s 只是表示这个装置及其取向。因此，可以将上述四个方程写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} I_2 \\ Q_2 \\ U_2 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ Q_1 \\ U_1 \\ V_1 \end{bmatrix}$$

即

$$\boldsymbol{S}_2 - M\boldsymbol{S}_1$$

式中，$\boldsymbol{S}_1$ 是入射到该装置上的光束的斯托克斯列，$\boldsymbol{S}_2$ 是出射光束的斯托克斯列，M 是一个 4×4 阶矩阵，它表示这个装置的特性及其取向，在米勒(Mueller)发明该矩阵之后，它就被称为米勒矩阵。因此，如果一条光束逐次通过一连串的装置，我们只要知道初始光束的特性，以及所通过的这些装置的特性，就能求出出射光束的特性。

表 3 列出了经常用到的各种装置的米勒矩阵。表中所列出的各类偏振光的斯托克斯列和麦克斯韦列，见附录 C。

我们将利用表 3 的数据，进行某些简单的计算。在土木和机械工程中，分析模型结构的应力时要广泛地应用光弹性效应。这种光弹性的物理效应简要地说是这样的：如果有一块诸如玻璃或塑料的透明基质，受到一个在方向上与其本身的表面相平行的应力，于是，它就变成一块相板，相板的光轴与其表面相平行。克尔(Kerr)，布儒斯特，菲利翁(Filon)和科克尔(Coker)以及其他一些人曾研究过这种效应。他们发现了光弹性定律，该

定律的最简便表达形式是，(a)相板上任意一点的光轴方向，就是该点的应力方向，(b)在任意点上出射的寻常光线与非常光线之间的相位延迟，与在该点上应力的大小成正比。倘若将这个相位延迟用以弧度为单位的 δ 角表示，那么，这第二条定律可以采用下述形式

$$\delta = csd$$

式中，s 是某个点上的应力，d 是相板的厚度，c 是常数，称为应力光学系数，c 只与相板的材料和所通过的光的波长有关。因此，倘若能求得所加相板的光轴方向和每一个点上的相位差，就完全可以确定应力分布。当知道一组已知应力在塑性样品中所产生的应变图样后，根据简单的比例关系就能推断出，几何形状与样品相似的真实实物结构中一组应力所产生的应变，因为该应变与样品所产生的应变成正比，从而避免了大量繁琐的计算。

现在用米勒矩阵的方法来推导这个理论。

将样品放在两块波拉片或"人造偏振片"之间，两块片的通光面互成"正交"即成 90° 角，所以，不放样品，光就不能通过这两块正交的偏振片。首先考虑偏振片的通光面是非常一般取向的情况。为了简单起见，将相板的光轴取为水平方向，不过，这并不失去一般性。假定，相板产生了寻常光和非常光之间的相位差 δ，且寻常光滞后。同时还假定，光通过的第一块偏振片的通光面处在水平轴 Ox 的上方，并与 Ox 成 α 角；而紧跟在相板之后的第二块偏振片，其通光面处在水平轴 Ox 的下方，并与 Ox 成 γ 角，通常习惯上写为 $-\gamma$ 角。将强度为 I_1 的非偏振光射入第一块偏振片。现在采用米勒矩阵来计算从第二块偏振片出射的光束强度。若从第一块偏振片出射的光束的斯托克斯列为 S_2，那么，应用偏振片的米勒矩阵表示式，求得

表 9 理想的线偏振器，线延迟器，轴向旋转后的线延迟器，和圆延迟器的米勒矩阵

夹角 θ 表示偏振器的通光面的取向，或线延迟器的快轴相对于 x 轴的取向。

装置的类型	$\theta=0$	$\theta=\pm\pi/4$	$\theta=\pi/2$	θ 取任意值
夹角为 θ 的理想线偏振器	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&\pm1&0\\0&0&0&0\\\pm1&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\-1&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&C_2&S_2&0\\C_2&C_2^2&C_2S_2&0\\S_2&C_2S_2&S_2^2&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ $C_2=\cos 2\theta$ $S_2=\sin 2\theta$
与快轴成夹角 θ 的 1/4 波线延迟器	$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&\mp1\\0&0&1&0\\0&\pm1&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&C_2^2&C_2S_2&-S_2\\0&C_2S_2&S_2^2&C_2\\0&S_2&-C_2&0\end{bmatrix}$
与快轴成夹角 θ 的半波线延迟器	$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&C_4&S_4&0\\0&S_4&-C_4&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$ $C_4=\cos 4\theta$ $S_4=\sin 4\theta$
与快轴成夹角 θ 且相位延迟为 δ 的线延迟器	$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\beta&\mu\\0&0&-\mu&\beta\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&\beta&0&\mp\mu\\0&0&1&0\\0&\pm\mu&0&\beta\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\beta&-\mu\\0&0&\mu&\beta\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&C_2^2+S_2^2\beta&C_2S_2(1-\beta)&-S_2\mu\\0&C_2S_2(1-\beta)&S_2^2+C_2^2\beta&C_2\mu\\0&S_2\mu&-C_2\mu&\beta\end{bmatrix}$

注意：在上述矩阵中，我们采用两个缩写的记号 $\beta=\cos\delta$ 和 $\mu=\sin\delta$

新的 x 轴相对于老的 x 轴旋转了 θ 角，或圆延迟器将圆偏振态向左延迟了 2θ 弧度。 $\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&C_2&S_2&0\\0&-S_2&C_2&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$ 若用 $R(\theta)$ 表示这个"旋转器"矩阵，则可用它来将任何取向为 ϕ 的偏振装置或光学系统的米勒矩阵，变换成新的相对应的取向为 $(\theta+\phi)$ 的同一个装置或系统的米勒矩阵。该变换公式为 $M(\theta+\phi)=R(-\theta)M(\phi)R(\theta)$

倘若一个由几个装置组成的全偏振系统要进行旋转，那么，最简便的计算方法是采用上述表格中矩阵的西变换。对于单个装置，则计算更迅速，通常只要从上述表格中适当选取一个矩阵就可以了。(这些矩阵的推导见附录 D。)

$$
S_2=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & 0 \\ \cos 2\alpha & \cos^2 2\alpha & \cos 2\alpha \sin 2\alpha & 0 \\ \sin 2\alpha & \sin 2\alpha \cos 2\alpha & \sin^2 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_1 \cos 2\alpha \\ I_1 \sin 2\alpha \\ 0 \end{bmatrix}=\frac{I_1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ \cos 2\alpha \\ \sin 2\alpha \\ 0 \end{bmatrix}
$$

现在让第一块偏振片出射的光束通过相板，此时光束的斯托克斯列变为 S_3，即用相板的米勒矩阵乘以 S_2。也就是

$$
S_3=\frac{I_1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\delta & \sin\delta \\ 0 & 0 & -\sin\delta & \cos\delta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \cos 2\alpha \\ \sin 2\alpha \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
=\frac{I_1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ \cos 2\alpha \\ \sin 2\alpha \cos\delta \\ -\sin 2\alpha \sin\delta \end{bmatrix}
$$

（注意，与这些矩阵算法一样，类似于 I_1 的任何纯量乘子，都可以从表达式的一边移项到另一边。）从相板出射的光束接着便通过第二块偏振片，此时，斯托克斯列变为 S_4，即用第二块偏振片的米勒矩阵乘以 S_3。也就是

$$
S_4=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & \cos 2\gamma & -\sin 2\gamma & 0 \\ \cos 2\gamma & \cos^2 2\gamma & -\sin 2\gamma \cos 2\gamma & 0 \\ -\sin 2\gamma & -\sin 2\gamma \cos 2\gamma & \sin^2 2\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$\times\begin{bmatrix}1\\ \cos 2\gamma\\ \sin 2\alpha\cos\delta\\ -\sin 2\alpha\sin\delta\end{bmatrix}\frac{I_1}{2}$$

$$=\frac{I_1}{4}\begin{bmatrix}1+\cos 2\gamma\cos 2\alpha \quad \sin 2\gamma\sin 2\alpha\cos\delta\\ \cos 2\gamma+\cos^2 2\gamma\cos 2\alpha-\sin 2\gamma\cos 2\gamma\sin 2\alpha\cos\delta\\ -\sin 2\gamma-\sin 2\gamma\cos 2\gamma\cos 2\alpha+\sin^2 2\gamma\sin 2\alpha\cos\delta\\ 0\end{bmatrix}$$

S_4 的第一个元素是 I_4，表示最后出射光束的强度。现在来考虑一个第一块和第二块偏振片相正交，即两块偏振片的通光面相互垂直的特殊情况。于是，在无样品时，光完全不能通过。这意味着 $\alpha+\gamma=90°$，因此，$2\alpha+2\gamma=180°$，所以 $\sin 2\gamma=\sin 2\alpha$，$\cos 2\gamma=-\cos 2\alpha$。经过几次乘法运算以后，出射光束的强度表达式就变成

$$I_4=\frac{1}{2}(1-\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha\cos\delta)\frac{I_1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}I_1\sin^2 2\alpha\sin^2\frac{\delta}{2}$$

首先，若 $\sin 2\alpha=0$，则上式为零。也就是说，若 $\alpha=0$ 或 $\alpha=90°$，就会发生这种情况，这表明，相板的光轴必定与其中一块偏振片的通光面相平行。这就给出了所谓等倾线的曲线，从等倾线中可以推断出每一个点上的应力方向。

其次，若 $\sin(\delta/2)=0$，即若 $\delta/2=0$，π，2π 或 π 的任意整数倍数，上式也为零。由此可以求得每一个点上应力的数值，因为这个数值与 δ 成正比。$\sin(\delta/2)=0$ 所对应的曲线称为等色线。在解释等色线时，屏幕上同时会出现等倾线，这会引起某种混乱。

人们常常希望消除等倾线，利用两块1/4波片就能做到这一点，其步骤如下：将一块1/4波片放在第一块偏振片和样品之间，该波片的快轴与水平方向成+45°，即处在第一和第三象限内。将另一块1/4波片正好放在样品的后面，该波片的快轴与水平方向再成45°，不过，是处在第二和第四象限内，所以，照惯例将该角度当作-45°。

现在来说明，在插入两块1/4波片时，为什么屏幕上的光强只与相板产生的相位变化有关，而与相板的取向无关。为了简单起见，假设第一块偏振片的通光面为水平方向，而第二块偏振片的通光面为垂直方向。在寻求等色线时，实际上总是可以这样排布光学元件的。

将一束非偏振光通过第一块偏振片，非偏振光的四个参数除了I_1之外其余全都是零。应用偏振片的米勒矩阵公式，求得从第一块偏振片出射的光束的斯托克斯列为：

$$\boldsymbol{S}_2=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1\\0\\0\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}I_1\\I_1\\0\\0\end{bmatrix}$$

光束现在通过一块其快轴与x轴成+45°的1/4波片。从表3查到一个合适的米勒矩阵公式，就可以得到一个表示右旋圆偏振光的斯托克斯列，即

$$\boldsymbol{S}_3=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1\\I_1\\0\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}I_1\\0\\0\\I_1\end{bmatrix}$$

光束接着通过一块相位延迟为δ，快轴取向为某个未知夹角θ的相板。表3给出了这种装置的米勒矩阵，为了简便起见，分别

用 C_2 和 S_2 来代替 $\cos 2\theta$ 和 $\sin 2\theta$，用 β 和 μ 代替 $\cos\delta$ 和 $\sin\delta$。根据这些记号，得到了出射光束的斯托克斯列：

$$
\boldsymbol{S}_4=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2+S_2^2\beta & C_2S_2(1-\beta) & -S_2\mu \\ 0 & C_2S_2(1-\beta) & S_2^2+\beta C_2 & C_2\mu \\ 0 & S_2\mu & -C_2\mu & \beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \\ 0 \\ I_1 \end{bmatrix}
$$

$$
=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} I_1 \\ S_2\mu I_1 \\ C_2\mu I_1 \\ \beta I_1 \end{bmatrix}
$$

光束在通过另一块快轴与 x 轴成 $45°$ 的 $1/4$ 波片后，其斯托克斯列变为

$$
\boldsymbol{S}_5=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ -S_2\mu I_1 \\ C_2\mu I_1 \\ \beta I_1 \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} I_1 \\ \beta I_1 \\ C_2\mu I_1 \\ S_2\mu I_1 \end{bmatrix}
$$

光束最后通过其通光面为垂直方向的第二块偏振片，输出光束的斯托克斯列为

$$
\boldsymbol{S}_6=(1/2)(1/2)\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ \beta I_1 \\ C_2\mu I_1 \\ S_2\mu I_1 \end{bmatrix}
$$

$$
=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} I_1-\beta I_1 \\ -I_1+\beta I_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}=\frac{I_1}{4}\begin{bmatrix} 1-\beta \\ -1+\beta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

输出光束的强度由上述斯托克斯列的第一个元素表示，即

$$I_6=\frac{1}{4}\ I_1(1-\beta)=I_1\frac{(1-\cos\delta)}{4}=\frac{1}{2}\ I_1\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

由此可见，输出光束的强度只与输入光束强度 I_1，以及相板所产生的相位延迟 δ 有关，而与描述相板取向的夹角 θ 无关。因此，与相板取向有关的等倾线已经消失，只剩下等色线。

有时将一块线偏振器和一块 $\frac{\lambda}{4}$ 相板互成 $\pm45°$ 夹在一起，组合成同一个偏振片，这种组合偏振片称为右旋或左旋圆偏振器。采用这种滤光器时，必须小心谨慎安装，切忌将它们前后次序颠倒了。（学生将会发现，在刚才进行的计算中，将第一块偏振片和第一块 $\lambda/4$ 相板互换会发生怎样的结果。）

应用上述计算方法，对斯托克斯列的每个元素依次求值。虽然有可能将所有的 4×4 阶米勒矩阵全部计算出来，但是，所需的计算次数将会明显地增加。如果采用计算机程序，这种缺点就无关紧要了。（值得指出的是，若用一束偏振光 $\begin{bmatrix}I_1\\Q_1\\U_1\\V_1\end{bmatrix}$ 代替原先的非偏振光 $\begin{bmatrix}I_1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$，那么，输入偏振态的大部分影响都会被第一个偏振器去掉，唯一保持下来的是，在接下来的计算步骤中，可以用 I_1+Q_1 来代替 I_1。）

4.4 用实验方法确定米勒矩阵元或斯托克斯列

现在暂时不讨论用实验方法求得任何光束的斯托克斯列和任何光学装置的米勒矩阵的技术问题。（我们也能用实验方法来求出一个光学成像系统的光线转移矩阵的各个元素，见2.8

节。)

首先需要求出光束的全部即四个斯托克斯参数。假设，利用光电池可以直接测得光束强度,这样,观察光束强度如何受所通过的各种装置的影响,就可以确定光束的所有斯托克斯参数。通常假设光束在 Oz 方向水平传播,这样,Oy 是垂直方向, Ox 是水平方向。一般需要知道六个强度测量值，才能求得该光束的斯托克斯列。即

(1) 一束光通过一块通光面与 x 轴相平行的偏振片。透过该偏振片的光束强度为 E_1, E_1 与一个平行于 x 轴的振动的振幅平方即前面提到的 H^2 成正比。因此 $E_1=H^2$。

(2) 将该偏振片旋转,使其通光面变成垂直方向,即与 y 轴相平行。通过该偏振片的光束强度现在为 E_2, E_2 与一个平行于 y 轴的振动分量的平方，即前面提到的 K^2 成正比，即 $E_2=K^2$。于是,根据斯托克斯参数的定义,得

$$I=H^2+K^2=E_1+E_2$$

和

$$Q=H^2-K^2=E_1-E_2。$$

(3) 初始光束现在通过一块通光面与水平方向成45°，且处于第一和第三象限的偏振片。应用已经推得的米勒矩阵公式,求得从该偏振片出射的光束的斯托克斯列必须为

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I\\ Q\\ U\\ V\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}I+U\\ 0\\ I+U\\ 0\end{bmatrix}$$

因此,从偏振片出射的光束强度 E_3 为 $1/2(I+U)$。

(4) 现在将初始光束通过一块通光面倾斜于水平方向45°、但处在第二和第四象限的偏振片，于是，按照惯例，将这个角度当作 $-45°$。将这个 α 值代入偏振片矩阵后，出射光束的斯

托克斯列便是

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} I-U \\ 0 \\ -I+U \\ 0 \end{bmatrix}$$

从该偏振片出射的光束强度现在是 $E_4=1/2(I-U)$。相减后得

$$E_3-E_4=U。$$

现在知道了四个斯托克斯参数中的三个。为了求得第四个参数，可以使光束通过一块快轴为水平方向的1/4波片。应用推得的1/4波片公式，则光束通过1/4波片之后的斯托克斯列变为：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I \\ Q \\ V \\ -U \end{bmatrix}$$

(5) 从1/4波片出射的光束现在再通过一块象测量(3)时一样取向的偏振片。光束的斯托克斯列变成

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I \\ Q \\ V \\ -U \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} I+V \\ 0 \\ I+V \\ 0 \end{bmatrix}$$

其强度 $E_5=1/2(I+V)$

(6) 从1/4波片出射的光束现在通过一块象测量(4)一样取向的偏振片。其斯托克斯列变为

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I \\ Q \\ V \\ -U \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} I-V \\ 0 \\ -I+V \\ 0 \end{bmatrix}$$

光束强度为 $E_6=\frac{2}{1}(I+V)$。

将最后两项测量中所得的斯托克斯列的第一个元素即光强相减，得 $V=E_5-E_6$。初始光束所有的四个斯托克斯参数现在都已经确定了。

现在来看看，将各种类型的光通过任何光学装置，并确定其出射光束的四个斯托克斯参数后，如何应用上述结果来确定这些光学装置的米勒矩阵。

假设：初始光束的斯托克斯列为 $\boldsymbol{S}_1$，出射光束的斯托克斯列为 $\boldsymbol{S}_2$，光学装置的米勒矩阵为 T，于是有

$$\boldsymbol{S}_2=T\boldsymbol{S}_1$$

即

$$\begin{bmatrix} I_2 \\ Q_2 \\ U_2 \\ V_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & B & C & D \\ E & F & G & H \\ J & K & L & M \\ N & P & R & S \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ Q_1 \\ U_1 \\ V_1 \end{bmatrix}$$

现在依次将四种类型的光束通过该光学装置，并应用已经描述过的方法来测量出射光束的斯托克斯列。

(1) 首先将一束普通的非偏振光通过该光学装置。令光束强度为 α；应用已经推导的非偏振光公式，则 $I_1=\alpha$，以及 Q_1，U_1 和 V_1 三者都等于零。于是，四个方程变成

$$I_2=A\alpha，即\ A=I_2/\alpha$$

$$Q_2=E\alpha，即\ E=Q_2/\alpha$$

$$U_2=J\alpha，即\ J=U_2/\alpha$$

$$V_2=N\alpha，即\ N=V_2/\alpha$$

(2) 其次，将一束与 x 轴相平行的平面偏振光通过光学装置。此时，$I_1=Q_1=\beta$，即 U_1 和 V_1 两者皆为零。于是，若称 $\boldsymbol{S}_3$ 为出射光束的斯托克斯列，则四个方程变成

$$I_3=(A+B)\beta, \text{即 } B=I_3/\beta-A$$
$$Q_3=(E+F)\beta, \text{即 } F=Q_3/\beta-E$$
$$U_3=(J+K)\beta, \text{即 } K=U_3/\beta-J$$
$$V_3=(N+P)\beta, \text{即 } Q=V_3/\beta-N$$

(3) 将一束右旋圆偏振光通过该装置，这时 $I_1=V_1=\omega$，即 Q_1 和 U_1 两者皆为零。于是，若将 S_4 称为出射光束的斯托克斯列，则四个方程变成

$$I_4=(A+D)\omega, \text{即 } D=I_4/\omega-A$$
$$Q_4=(E+H)\omega, \text{即 } H=Q_4/\omega-E$$
$$U_4=(J+M)\omega, \text{即 } M=U_4/\omega-J$$
$$V_4=(N+S)\omega, \text{即 } S=V_4/\omega-N$$

(4) 将一束振动面与 x 轴成 45°，且处于第一和第三象限的平面偏振光通过光学装置。这时 $I_1=U_1=\mu$，而 Q_1 和 V_1 两者皆为零。因此，若将出射光束的斯托克斯列称为 S_5，则四个方程变成

$$I_5=(A+C)\mu, \text{即 } C=I_5/\mu-A$$
$$Q_5=(E+G)\mu, \text{即 } G=Q_5/\mu-E$$
$$U_5=(J+L)\mu, \text{即 } L=U_5/\mu-J$$
$$V_5=(N+R)\mu, \text{即 } R=V_5/\mu-N$$

在目前推导得到的每一个方程中，米勒矩阵的未知元素皆由所测得的光强以及以前计算出来的其他几个米勒矩阵元素来表示。因此，用这种办法就能确定出一个光学装置的所有十六个米勒矩阵元。

4.5 用琼斯算法变换麦克斯韦列

还有另一种象米勒算法一样的方法，可以用来处理全偏振光问题。这种方法是由 R. C. 琼斯(R. C. Jones)创立的。由于

这种计算法采用 2×2 阶矩阵、而不是 4×4 阶矩阵进行运算，所以它在某些方面比米勒算法更为简便。不过，这些矩阵的某些元素是复数，因而就存在着因某些参数不能用实验方法直接测量而导致无法计算的缺点。但是，琼斯矩阵没有过多的元素，并且至少在原则上讲，所能列出来的每一个琼斯矩阵都对应于一个实际可能的光学装置。

在偏振光学的许多问题中，上述两种算法都适用。不过，涉及到部分偏振光时，应该选择米勒计算法；在发生干涉效应的时候，或是使用激光器造成的相干光的情况下，选择琼斯计算法则更有效。

（在写本章时，我们已经尽量以独立的篇幅来讨论这两种算法；因为，可能有些读者只对其中某种算法感兴趣，而对另一种算法不感兴趣。但是，在研究这两种算法时，细心的学生可能会从光学中相干光和非相干光两种方法之间所存在的差别中悟出一点道理。这两种算法之间的界限该怎么区分尚有待于探讨。）

琼斯算法不是用与光束强度成正比的四个斯托克斯参数进行运算，而是用表示横向振动的两个分量即振幅和相位的麦克斯韦列进行运算。亦即：对于一些使用全偏振光的装置来说，输出光束的电场分量与输入光束的电场分量成线性函数关系，这样一个将该装置的输出光束分量与输入光束分量连接起来的矩阵，便能够表示该装置的特性。正如处理米勒矩阵那样，我们将列表给出各类装置的琼斯矩阵。（附录 E 中给出了这些矩阵的推导，并且由于这两种算法紧密相关，所以在附录F 中讨论了它们之间的相互关系。）

在 4.1 节中已经看到，如何应用一个麦克斯韦列来表示某些与任何全偏振扰动相对应的横向振动。对一个以 Oz 方向传播的平面波来说，可以将电场当作复矢量的实部

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \exp i \left\{ \omega \left(t - \frac{z}{c} \right) + \phi_x \right\} \\ K \exp i \left\{ \omega \left(t - \frac{z}{c} \right) + \phi_y \right\} \end{bmatrix}$$

在大多数情况下，把光束对时间以及对 z 轴的依赖关系作为纯量乘子而移到矩阵列的外面，于是有

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \exp(i\phi_x) \\ K \exp(i\phi_y) \end{bmatrix} \exp i \left\{ \omega \left(t - \frac{z}{c} \right) \right\}$$

计算光束强度的一个有效规则是，用麦克斯韦列的转置的复共轭来与其左乘，这种运算有时称为求括号积。因此得

$$\begin{aligned} I &= \begin{bmatrix} E_x^* & E_y^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} H \exp(-i\phi_x) & K \exp(-i\phi_y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \exp(i\phi_x) \\ K \exp(i\phi_y) \end{bmatrix} \\ &= (H^2 + K^2) \end{aligned}$$

（纯量乘子的系数等于1）。

如果只涉及单个扰动，有时就可以忽略振动的绝对相位，并且相位角可以是任意的，例如 x 分量的相位角可以取为零。同时，在许多情况下，也不需要绝对振幅，并且可以将它移到矩阵列外变成纯量乘子。对一束强度为 1 的光，必须使 (H^2+K^2) 等于 1，于是有 $H=\cos\theta$ 和 $K=\sin\theta$。根据这个“归一化”的麦克斯韦列，整个扰动的表达式就变成

$$\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \exp(i\Delta) \end{bmatrix} A \exp i\omega \left(t - \frac{z}{c} \right)$$

上式是一个全相干平面单色波扰动的表达式。然而，如前所述，振幅 A 和相位角 ϕ 两者本身都是一个有涨落的函数，只有在光束的横切面和光束传播方向上测量这样一个有限范围内，这两

者才都保持是常数，所以，这时也可用上式表示相干度较差的光辐射。相干度越高，A 和 ϕ 两者都保持是常数的范围就越大；同时根据海森伯测不准原理(Heisenberg's uncertainty principle)，伴随每个光子的动量矢的测不准性也越小，用经典的术语来讲，即光束的波长和传播方向这两者的测不准性也越小。

实验事实是，在光频范围内，介质对电磁波场的响应是相当好的线性关系。当然也会发生非线性光学效应，不过，必须利用激光源并以非常高的电场强度进行工作时，才能观察到这些非线性效应。

所以可以预言，如果

$$E_1=\begin{bmatrix} H_1e^{i\phi_1} \\ K_1e^{i\psi_1} \end{bmatrix}$$

表示进入到某类偏振装置的光束的麦克斯韦列，那么，输出光束的麦克斯韦列可以用 E_2 表示，其中

$$E_2=\begin{bmatrix} H_2e^{i\phi_2} \\ K_2e^{i\psi_2} \end{bmatrix} \text{和} \quad \begin{matrix} H_2e^{i\phi_2}=J_{11}H_1e^{i\phi_1}+J_{12}K_1e^{i\psi_1} \\ K_2e^{i\psi_2}=J_{21}H_1e^{i\phi_1}+J_{22}K_1e^{i\psi_1} \end{matrix}$$

或者写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} H_2e^{i\phi_2} \\ K_2e^{i\psi_2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H_1e^{i\phi_1} \\ K_1e^{i\psi_1} \end{bmatrix}$$

(一般来说，方矩阵的四个元素本身都是复数；并且它们只与偏振装置有关。)

应当指出，在上述方程中，为了一般性起见，在每一个麦克斯韦列中都用了两个独立的相位角 ϕ 和 ψ。就偏振态而言，唯有相位差 $(\psi-\phi)=\Delta$ 任何时候都是重要的。不过，即使在 x 分量上输入光束的相位角 ϕ_1 为零，也不能保证相对应的输出光束相位角 ϕ_2 也为零。一旦已经算出输出光束的麦克斯韦列，那么，用任何需要的相位因子去乘整个列便是十分容易的事了。

表 4　理想的线偏振器，线延迟器，轴向旋转后的线延迟器和圆延迟器的琼斯矩阵

夹角 θ 表示偏振器通光面的取向，或线延迟器的快轴相对于 x 轴的取向

装置的类型	$\theta=0$	$\theta=\pm\frac{\pi}{4}$	$\theta=\frac{\pi}{2}$	θ 取任意值
夹角为 θ 的理想线偏振器	$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & \pm 1\\ \pm 1 & 1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}C_1^2 & C_1S_1\\ C_1S_1 & S_1^2\end{bmatrix}$　$C_1=\cos\theta$　$S_1=\sin\theta$
与快轴成 θ 夹角的 1/4 波线延迟器	$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -i\end{bmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}(1-i) & \pm(1+i)\\ \pm(1+i) & (1-i)\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-i & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}C_1^2-iS_1 & C_1S_1(1+i)\\ C_1S_1(1+i) & -iC_1^2+S_1^2\end{bmatrix}$
若 $\theta=\pm\frac{\pi}{4}$，则可乘以 $e^{i\pi/4}$，得		$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & \pm i\\ \pm i & 1\end{bmatrix}$		
与快轴成 θ 角的半波线延迟器	$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0 & \pm 1\\ \pm 1 & 0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}C_2 & S_2\\ S_2 & -C_2\end{bmatrix}$
与快轴成 θ 夹角，且相位延迟为 δ 的线延迟器	$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{-i\delta}\end{bmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}(e^{-i\delta}+1) & \pm(1-e^{-i\delta})\\ \pm(1-e^{-i\delta}) & (e^{-i\delta}+1)\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}e^{-i\delta} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}C_1^2+S_1^2e^{-i\delta} & C_1S_1(1-e^{-i\delta})\\ C_1S_1(1-e^{-i\delta}) & C_1^2e^{-i\delta}+S_1^2\end{bmatrix}$　$C_2=\cos 2\theta$　$S_2=\sin 2\theta$
		或 $e^{-i\delta/2}\begin{bmatrix}\cos\frac{\delta}{2} & \pm i\sin\frac{\delta}{2}\\ \pm i\sin\frac{\delta}{2} & \cos\frac{\delta}{2}\end{bmatrix}$		

新的 x 轴相对老的 x 轴旋转了 θ 角，或圆延迟器将圆偏振态向左延迟了 2θ 弧度。

$$\begin{bmatrix}C_1 & S_1\\ -S_1 & C_1\end{bmatrix}$$

若用 $R(\theta)$ 表示这个"旋转器"矩阵，则可用它将取向为 ϕ 的任何偏振装置或光学系统的琼斯矩阵，变换成新的相对应的取向为 $(\theta+\phi)$ 的同一个装置或系统的矩阵。该变换公式为 $J(\theta+\phi)=R(-\theta)J(\phi)R(\theta)$

倘若一个由几个装置组成的全偏振系统要旋转，那么，最简便的计算方法是采用上述表格中矩阵的酉变换。对于单个装置，则计算更迅速，通常只要从上述表格中适当选取一个矩阵就可以了。(这些矩阵的推导及其归一化的讨论，见附录 G_3)

现在从上述方程出发来推导琼斯算法。由四个 J_S 矩阵组成的一个矩阵称为偏振装置的琼斯矩阵，所以，这个矩阵方程最后可以写成

$$E_2 = JE_1$$

假定现在有两个光学装置，它们的琼斯矩阵分别为

$$J_a \text{ 和 } J_b$$

令一束光通过这两个串联的装置。令初始光束的麦克斯韦列为 E_1，介于两个装置之间的光束的麦克斯韦列为 E_2，通过第二个装置之后的光束的麦克斯韦列为 E_3。根据刚才的假设，则可以写成

$$E_2 = J_aE_1 \text{ 和 } E_3 = J_bE_2$$

将上述第一个方程代入第二个方程，根据矩阵的结合特性，得

$$E_3 = J_b(J_aE_1) = (J_bJ_a)E_1$$

因此，可以看到，当光束通过一个由许多装置串接而成的组合装置时，只要将各个装置各自的琼斯矩阵放在一起相乘，便可得到该组合装置的琼斯矩阵。(这里所用的规则与高斯光学中的折射和平移矩阵，以及米勒矩阵的规则都相同。)

为了方便地求解这些问题，表 4 列出了通常使用的各类偏振装置的琼斯矩阵。

4.6 用实验方法确定琼斯矩阵元或麦克斯韦列

现在来描述确定任何偏振光，无论是平面偏振光或椭圆偏振光的麦克斯韦列的方法，以及通过实验求得任何偏振装置的琼斯矩阵的方法。这些方法都涉及到光束如何通过装置、各种偏振片以及相板，因此，就有测量从上述每个部件出射的光束强度的问题。

首先考虑如何确定光束的麦克斯韦列。假定光束的麦克斯

韦列是

$$\begin{bmatrix} H \\ K\exp(i\Delta) \end{bmatrix}$$

所以，强度为

$$\begin{bmatrix} H & K\exp(-i\Delta) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H \\ K\exp(i\Delta) \end{bmatrix} = H^2+K^2$$

适当选择光束强度的单位，使光束强度正好等于1。

现在先让这束光通过一块通光面为水平方向，即与x轴相平行的偏振片。出射光束的麦克斯韦列为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H \\ K\exp(i\Delta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ 0 \end{bmatrix}$$

所以强度 $I_1 = H^2$，于是 $H=\sqrt{I_1}$，其中 I_1 为测得的强度透射比。

现在让初始光束通过一块通光面为垂直方向（与y轴相平行）的偏振片，于是，出射光束的麦克斯韦列变成

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H \\ K\exp(i\Delta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ K\exp(i\Delta) \end{bmatrix}$$

所以，强度 $I^2 = K^2$，于是 $K=\sqrt{I_2}$。

现在让光束通过一块通光面与x轴成45°角，且处于第一和第三象限内的偏振片，这时的琼斯矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = 1/2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

新的麦克斯韦列为

$$1/2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H \\ K\exp(i\Delta) \end{bmatrix} = 1/2\begin{bmatrix} H+K\exp(i\Delta) \\ H+K\exp(i\Delta) \end{bmatrix}$$

用麦克斯韦列的复共轭转置与其本身相乘，得到光强为

$$I_3 = 1/2\{H^2+HK[\exp(i\Delta)+\exp(-i\Delta)]+K^2\}$$

现在让光束通过一块通光面与 x 轴成 45° 角，但处在第二和第四象限内的偏振片，因此 $\theta=-45°$。此时，麦克斯韦列变成

$$1/2\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}H\\ K\exp(i\Delta)\end{bmatrix}=1/2\begin{bmatrix}H-K\exp(i\Delta)\\ -H+K\exp(i\Delta)\end{bmatrix}$$

其强度为

$$I_4=1/2\{H^2-HK[\exp(i\Delta)+\exp(-i\Delta)]+K^2\}$$

所以

$$\begin{aligned}I_3-I_4&=1/2\times 2HK[\exp(i\Delta)+\exp(-i\Delta)]\\&=HK(\cos\Delta+i\sin\Delta+\cos\Delta-i\sin\Delta)\\&=2HK\cos\Delta\end{aligned}$$

因为已知 H 和 K，所以，上述方程确定了 $\cos\Delta$，不过 Δ 仍然可以是正数或负数。由于正负号尚不能确定，所以现在通过确定 $\sin\Delta$，然后再来确定 Δ 的符号。

令光束通过一块快轴为水平方向的 1/4 波片。由于 1/4 波片中已知 $\delta=90°$ 和 $\theta=0°$，所以求得琼斯矩阵为

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -i\end{bmatrix}$$

以及出射光束的麦克斯韦列变为

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}H\\ K\exp(i\Delta)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}H\\ -iK\exp(i\Delta)\end{bmatrix}$$

令从 1/4 波片出射的光束通过一块向 x 轴倾斜 45° 的偏振片。其麦克斯韦列就变成

$$1/2\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}H\\ -iK\exp(i\Delta)\end{bmatrix}=1/2\begin{bmatrix}H-iK\exp(i\Delta)\\ H-iK\exp(i\Delta)\end{bmatrix}$$

光强为

$$I_5 = 1/2\{H^2 - iHK[\exp(i\Delta) - \exp(-i\Delta)] + K^2\}$$
$$= 1/2(H^2 - 2HK\sin\Delta + K^2)$$

现在令从1/4波片出射的光束通过一块与x轴成$-45°$夹角的偏振片。出射光束的麦克斯韦列就变成

$$1/2\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H \\ -iK\exp(i\Delta) \end{bmatrix} = 1/2\begin{bmatrix} H + iK\exp(i\Delta) \\ -H - iK\exp(i\Delta) \end{bmatrix}$$

光强为

$$I_6 = 1/2\{H^2 - iHK[\exp(-i\Delta) - \exp(i\Delta)] + K^2\}$$
$$= 1/2(H^2 + 2HK\sin\Delta + K^2)$$

所以

$$I_6 - I_5 = 2HK\sin\Delta$$

这就确定了$\sin\Delta$。已知$\sin\Delta$和$\cos\Delta$，且经检验它们的平方和为1，由此求得Δ的数值。现在便得到了初始光束的整个麦克斯韦列。

（在进行上述测量时，应该估计到光束即使在最有利的方向上振动，也决不会百分之百地透过偏振器。例如，如果使用$HN32$偏振片，实际测量I_1到I_6所得到的光电流值，就减少到一块理想偏振器的理论值的64%左右。对一块给定的偏振器来说，其透射光强度的精确值应该通过测量来确定，例如，用一束非偏振光输入，并测量至少是通光面为两种取向时的透射光强度值。）

现在来描述一种通过光束强度测量，就能够确定任何偏振装置的琼斯矩阵的方法。假定偏振装置的琼斯矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11} + iY_{11} & X_{12} + iY_{22} \\ X_{21} + iY_{21} & X_{22} + iY_{22} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} R_{11}\exp(i\theta_{11}) & R_{12}\exp(i\theta_{12}) \\ R_{21}\exp(i\theta_{21}) & R_{22}\exp(i\theta_{22}) \end{bmatrix}$$

(当然，琼斯矩阵的矩阵元也可能是复数，而且我们已经在笛卡儿坐标和极坐标表述中指出了这个问题。)

A. 将一束与 X 轴相平行的强度为1的平面偏振光通过偏振装置，于是，入射光束的麦克斯韦列为

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

出射光束的麦克斯韦便为

$$\begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} J_{11} \\ J_{21} \end{bmatrix}$$

A.1. 从该偏振装置出射的光束现在再通过一块通光面为水平方向的偏振片，因此，出射光束的麦克斯韦变成

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} J_{11} \\ J_{21} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} J_{11} \\ 0 \end{bmatrix}$$

光束强度为

$$\begin{aligned} I_2 &= J_{11}^* J_{11} = (X_{11} - iY_{11})(X_{11}+iY_{11}) \\ &= X_{11}^2+Y_{11}^2 = R_{11}^2 \end{aligned}$$

A.2. 从该偏振装置出射的光束现在再通过一块通光面为垂直方向的偏振片。出射光束的麦克斯韦列变成

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} J_{11} \\ J_{21} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ J_{21} \end{bmatrix}$$

光强为 $I_3=R_{21}^2$。

B. 现在有一束与 Y 轴相平行的强度为1的偏振光通过偏振装置，入射光束的麦克斯韦列为

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

出射光束的麦克斯韦列为

$$\begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} J_{12} \\ J_{22} \end{bmatrix}$$

B.1. 从该偏振装置出射的光束现在再通过一块通光面为水平方向的偏振片。出射光束的麦克斯韦列便为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} J_{12} \\ J_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} J_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

光强为 $I_4=R_{12}^2$。

B.2. 从该偏振装置出射的光束现在再通过一块通光面为垂直方向的偏振片。出射光束的麦克斯韦列便为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} J_{12} \\ J_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ J_{22} \end{bmatrix}$$

光强为 $I_5=R_{22}^2$。

现在已经确定了琼斯矩阵的所有四个元素的大小。留下来的只是求这些矩阵元的夹角问题。

C. 现在让一束强度为1的右旋偏振光通过偏振装置，于是

$$H=K \text{ 和 } H^2+K^2=1$$

因此

$$H=K=1/\sqrt{2}。$$

对一束其 $\Delta=\pi/2$ 的右旋圆偏振光，则有 $\exp(i\Delta)=i$。所以，初始光束的麦克斯韦列为

$$1/\sqrt{2}\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

从偏振装置出射的光束的麦克斯韦列便为

$$1/\sqrt{2}\begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}=1/\sqrt{2}\begin{bmatrix} J_{11}+iJ_{12} \\ J_{21}+iJ_{22} \end{bmatrix}$$

C.1. 出射光束现在再通过一块通光面为水平方向的偏振

片，所以，出射光束的麦克斯韦列变成

$$1/\sqrt{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}J_{11}+iJ_{12}\\ J_{21}+iJ_{22}\end{bmatrix}=1/\sqrt{2}\begin{bmatrix}J_{11}+iJ_{12}\\ 0\end{bmatrix}$$

$$=1/\sqrt{2}\begin{bmatrix}(X_{11}+iY_{11})+i(X_{12}+iY_{12})\\ 0\end{bmatrix}$$

$$=1/\sqrt{2}\begin{bmatrix}(X_{11}-Y_{12})+i(Y_{11}+X_{12})\\ 0\end{bmatrix}$$

于是，用这个矩阵的复共轭转置与该矩阵本身相乘，得到强度

$$I_6=1/2[(X_{11}-Y_{12})^2+(Y_{11}+X_{12})^2]$$

所以

$$2I_6=X_{11}^2-2X_{11}Y_{12}+Y_{12}^2+Y_{11}^2+2Y_{11}X_{12}+X_{12}^2$$

因此，将已知的 I_2 和 I_4 值都代入，得

$$\frac{2I_6-I_2-I_4}{\sqrt{(I_2I_4)}}=\frac{2(Y_{11}X_{12}-X_{11}Y_{12})}{R_{11}R_{12}}$$

$$=2(\sin\theta_{11}\cos\theta_{12}-\cos\theta_{11}\sin\theta_{12})$$

$$=2\sin(\theta_{11}-\theta_{12})$$

（利用了一些有关琼斯矩阵元的笛卡儿坐标和极坐标表示式之间的关系式）。

C.2. 从该偏振装置出射的光束现在通过一块通光面为垂直方向的偏振片。出射光束的麦克斯韦列便变成

$$1/\sqrt{2}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}J_{11}+iJ_{12}\\ J_{21}+iJ_{22}\end{bmatrix}=1/\sqrt{2}\begin{bmatrix}0\\ J_{21}+iJ_{22}\end{bmatrix}$$

所以，光强为

$$I_7=1/2[(X_{21}-Y_{22})^2+(Y_{21}+X_{22})^2]$$

因此

$$\frac{2I_7-I_3-I_5}{\sqrt{(I_3I_5)}}=2\sin(\theta_{21}-\theta_{22})$$

（我们将这里和本节的后半部分留给学生去认真地进行计算。）

现在知道了两个角度$(\theta_{11}-\theta_{12})$和$(\theta_{21}-\theta_{22})$的正弦值，不过，因为

$$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta,$$

所以，仍然不能确定这两个角度到底是多少度。为此，还需要知道这两个角度的余弦值。

D. 令一束与 X 轴成 45°，强度为 1 的平面偏振光通过偏振装置。这束光的 $H=K=1/\sqrt{2}$ 和 $\Delta=0$，所以 $\exp(i\Delta)=1$。该初始光束的麦克斯韦列为

$$1/\sqrt{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

所以，通过装置以后，光束的麦克斯韦列变成

$$1/\sqrt{2}\begin{bmatrix}J_{11} & J_{12}\\J_{21} & J_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=1/\sqrt{2}\begin{bmatrix}J_{11}+J_{12}\\J_{21}+J_{22}\end{bmatrix}$$

D.1. 光束现在再通过一块通光面为水平方向的偏振片。出射光束的麦克斯韦列便变成

$$1/\sqrt{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}J_{11}+J_{12}\\J_{21}+J_{22}\end{bmatrix}=1/\sqrt{2}\begin{bmatrix}J_{11}+J_{12}\\0\end{bmatrix}$$

所以，光强为

$$I_8=1/2[(X_{11}+X_{12})^2+(Y_{11}+Y_{12})^2]$$

通过和前面相类似的计算，得

$$\frac{2I_8-I_2-I_4}{\sqrt{(I_2I_4)}}=2\cos(\theta_{11}-\theta_{12})$$

D.2. 从该偏振装置出射的光束现在通过一块通光面为垂直方向的偏振片。出射光束的麦克斯韦列便变成

$$1/\sqrt{2}\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}J_{11}+J_{12}\\J_{21}+J_{22}\end{bmatrix}=1/\sqrt{2}\begin{bmatrix}0\\J_{21}+J_{22}\end{bmatrix}$$

光强为

$$I_9=1/2[(X_{21}+X_{22})^2+(Y_{21}+Y_{22})^2]$$

于是

$$\frac{2I_9-I_3-I_5}{\sqrt{(I_3I_5)}}=2\cos(\theta_{21}-\theta_{22})$$

现在完全知道了两个夹角$(\theta_{11}-\theta_{12})$和$(\theta_{21}-\theta_{22})$的数值。(应该进行某些检查，以验证这些正弦和余弦的平方和是否近似等于1。)不过还需要了解这些角度之间的连接关系，即需要将角θ_{11}与θ_{21}或θ_{22}联系起来。为此，再次将一束水平偏振的平面偏振光通过偏振装置，所以，象第A节一样，从该装置出射的光束的麦克斯韦列为

$$\begin{bmatrix} J_{11} \\ J_{21} \end{bmatrix}$$

将这束光再通过一块通光面向X轴倾斜45°的偏振片。其麦克斯韦列就变成

$$1/2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} J_{11} \\ J_{21} \end{bmatrix}=1/2\begin{bmatrix} J_{11}+J_{21} \\ J_{11}+J_{21} \end{bmatrix}$$

这束光现在通过另一块X轴线为水平方向的偏振片。出射光束的麦克斯韦列变成

$$1/2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} J_{11}+J_{21} \\ J_{11}+J_{21} \end{bmatrix}=1/2\begin{bmatrix} J_{11}+J_{21} \\ 0 \end{bmatrix}$$

象第D.1.节或D.2.节一样，光束强度便变成

$$I_{10}=1/4[(X_{11}+X_{21})^2+(Y_{11}+Y_{21})^2]$$

所以

$$\frac{4I_{10}-I_2-I_8}{\sqrt{(I_2I_8)}}=2\cos(\theta_{11}-\theta_{21})$$

令一束从上述装置出射的，其麦克斯韦列为

$$\begin{bmatrix} J_{11} \\ J_{21} \end{bmatrix}$$

的光束现在再通过一块快轴为垂直方向的 1/4 波片。出射光束的麦克斯韦列便变成

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}J_{11}\\J_{21}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}J_{11}\\iJ_{21}\end{bmatrix}$$

现在再将这束光通过一块与光轴成 45° 夹角的偏振片。出射光束的麦克斯韦列便变成

$$1/2\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}J_{11}\\iJ_{12}\end{bmatrix}=1/2\begin{bmatrix}J_{11}+iJ_{21}\\J_{11}+iJ_{21}\end{bmatrix}$$

现在让光束通过一块轴线为水平方向的偏振片。出射光束的麦克斯韦列便变成

$$1/2\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}J_{11}+iJ_{21}\\J_{11}+iJ_{21}\end{bmatrix}=1/2\begin{bmatrix}J_{11}+iJ_{21}\\0\end{bmatrix}$$

象 C.1. 节和 C.2. 节一样，光束强度现在为

$$I_{11}=1/4[(X_{11}-Y_{21})^2+(Y_{11}+X_{21})^2]$$

所以

$$\frac{4I_{11}-I_2-I_3}{\sqrt{(I_2I_3)}}=2\sin(\theta_{11}-\theta_{21})$$

这样就确定了角度$(\theta_{11}-\theta_{21})$，所以，$\theta_{11}$ 和所有的其他三个角度之间的差值现在也知道了。

如同象有关米勒矩阵和琼斯矩阵的章节所作的说明一样，现在可以将 θ 中的某一个角当作是任意的，即可以任意地规定 θ_{11} 等于零。这意味着，其余的三个琼斯矩阵元的夹角也就知道了，因此，这个琼斯矩阵就已经完全确定了。

4.7 用米勒算法和琼斯算法解例题

例题 1 一台光源发出一束强度为 1 的平面偏振光，光束落在一台理想的线偏振器上。试证明从该偏振器出射的光束强

度为$\cos^2\theta$，其中θ为该偏振器在光束最大透过时的位置上所测得的夹角。将第一块偏振片的位置放置得使透射光消失，然后在光源和第一块偏振片之间放上第二块偏振片。

请说明现在有哪些光可以通过这两块偏振片，并证明这些光束的强度都与$\sin^2 2\phi$成正比关系，其中ϕ是第二块偏振片在消光位置上所测得的夹角。

解：现在用琼斯和米勒两种算法来求解本题。

首先用琼斯算法。假定入射光束为一束水平偏振的平面偏振光，于是，入射光束的麦克斯韦列为

$$E_1=\begin{bmatrix} H \\ 0 \end{bmatrix}$$

一块其通光面与X方向成θ夹角的偏振片的琼斯矩阵为

$$\begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix}$$

这样，从该偏振片出射的光束的麦克斯韦列便是

$$E_2=\begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} H\cos^2\theta \\ H\sin\theta\cos\theta \end{bmatrix}$$

如同早先已经解释的那样，用出射光束的麦克斯韦列的复共轭转置左乘该麦克斯韦列，便求得出射光束的强度。为了写下一个给定矩阵M的复共轭，简便的办法是用单个厄密记号$\boldsymbol{M}$来代替双重记号M^{*T}。当采用这种厄密记号时，便求得光强为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{E}_2&=\begin{bmatrix} H\cos^2\theta & H\cos\theta\sin\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H\cos^2\theta \\ H\cos\theta\sin\theta \end{bmatrix} \\
&=H^2\cos^4\theta+H^2\cos^2\theta\sin^2\theta \\
&=H^2\cos^2\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=H^2\cos^2\theta
\end{aligned}$$

在这个特殊的例题中，已知初始强度H^2等于1。

假定光束现在通过另一块通光面为垂直方向的偏振片，于是，其琼斯矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因此，从该偏振片出射的光束的麦克斯韦列为

$$E_3=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H\cos^2\theta \\ H\cos\theta\sin\theta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ H\cos\theta\sin\theta \end{bmatrix}$$

为了得到出射光束的强度，可以用 E_3 的复共轭转置乘以 E_3，得

$$\boldsymbol{E}_3 E_3=\begin{bmatrix} 0 & H\cos\theta\sin\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ H\cos\theta\sin\theta \end{bmatrix}$$

$$=H^2\cos^2\theta\sin^2\theta=\frac{H^2\sin^2 2\theta}{4}$$

因此，那块居中的即第二块偏振片存在着四种起消光作用的取向。

现在，再用米勒算法来解这个同样的例题。首先还是假定有一束与 X 轴相平行的平面偏振光，其斯托克斯列为

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

先求出通过第一块偏振片的出射光束的斯托克斯列，为此，用一块通光面与 X 轴方向成 θ 倾斜角的偏振片的米勒矩阵与初始光束的斯托克斯列相乘，其结果为

$$1/2\begin{bmatrix} 1 & C_2 & S_2 & 0 \\ C_2 & C_2^2 & C_2S_2 & 0 \\ S_2 & S_2C_2 & S_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}=1/2\begin{bmatrix} 1+C_2 \\ C_2+C_2^2 \\ S_2+S_2C_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

所以，出射光束的强度为

$$(1+\cos 2\theta)/2=2\cos^2\theta/2=\cos^2\theta$$

现在，将这束光通过一块通光面为垂直方向的偏振片，于是，该偏振片的 θ 角就是 90°。用刚才得到的偏振片的米勒矩阵乘以落在该偏振片上的光束的斯托克斯列，便得到一个合成的斯托克斯列，其结果为

$$1/2\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}1/2\begin{bmatrix}1+C_2\\ C_2+C_2^2\\ S_2+S_2C_2\\ 0\end{bmatrix}=1/4\begin{bmatrix}1-C_2^2\\ C_2^2-1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

所以，最后出射的光束强度 $=(1-C_2^2)/4=S_2^2/4=\dfrac{\sin^2 2\theta}{4}$。

例题 2 将三块偏振片排成一行，并有一束光通过这三块偏振片。如果将三块偏振片通光面的取向这样放置：第一块的通光面为垂直方向；当观察者对着光源看去时，第二块则处于垂直方向的右侧并与垂直轴构成 12° 的夹角；第三块处在垂直轴的左侧并与垂直轴构成 12° 的夹角，试求透射光与入射光的强度比。

解：因为琼斯算法不能处理非偏振光的问题，所以，我们用斯托克斯参数和米勒矩阵来求解本题。现在从一束非偏振光，其斯托克斯列为

$$\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

的入射光束着手。首先让这束光通过第一块通光面为垂直方向、即 $\theta=90°$ 的偏振片，求得出射光束的斯托克斯列为

$$1/2\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}=1/2\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}$$

(因为现在的光束是垂直偏振的，并考虑到初始光束的强度已有 50% 被第一块偏振片所吸收，所以，接下来都可以用琼斯算法来计算本例题的其余部分。)

光束接着落到第二块偏振片上，第二块偏振片的通光面与垂直方向的右侧成 12° 的夹角，于是，$\theta=90°-12°=78°$。由此得 $\cos 2\theta=-0.91$ 以及 $\sin 2\theta=0.41$。将从第一块偏振片出射的光束的斯托克斯列与第二块偏振片的米勒矩阵相乘，便得到从第二块偏振片出射的光束的斯托克斯列。其结果为

$$1/2\begin{bmatrix}1 & -0.91 & ? & ?\\ -0.91 & 0.83 & ? & ?\\ 0.41 & -0.37 & ? & ?\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}1/2\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}=1/4\begin{bmatrix}1.91\\-1.74\\0.77\\0\end{bmatrix}$$

注意，在上述偏振片的米勒矩阵中，我们已经插入某些问号用以代替某些矩阵元。这是因为在进入第二块偏振片的光束的斯托克斯列中，只有前两个元素不等于零，其余元素都等于零，所以用斯托克斯列的零元素与米勒矩阵两个右上列元素相乘，结果仍是零。因为这个结果不受这些非零元素数值的影响，所以插入一些问号是毫无问题的。

光束现在通过最后一块偏振片，其通光面与垂直方向的左侧成 12° 的夹角，于是 $\theta=102°$，$\cos 2\theta=-0.91$ 以及

$$\sin 2\theta=-0.41。$$

因此，最后出射光束的斯托克斯列由下式给出

$$1/2\begin{bmatrix}1 & -0.91 & -0.41 & ?\\ ? & ? & ? & ?\\ ? & ? & ? & ?\\ ? & ? & ? & ?\end{bmatrix}1/4\begin{bmatrix}1.91\\ -1.74\\ 0.78\\ 0\end{bmatrix}=1/8\begin{bmatrix}3.17\\ ?\\ ?\\ ?\end{bmatrix}$$

所以，倘若初始光束的强度取为1，则出射光束的强度为 $3.17/8=0.396$。这里再次可以看到，该米勒矩阵的后三行元素已全部用问号代替。这是因为现在仅仅需要求出从最后一块偏振片出射的光束强度，所以，除了求出该斯托克斯列的第一个元素之外，计算其余三个元素是毫无意义的。

例题3 有一束

$$X=H\cos\omega t \text{ 和 } Y=K\cos(\omega t+\Delta)$$

的右旋椭圆偏振光。试求该椭圆的长短轴与 X 轴之间的夹角，以及长短轴的长度之比。

解：倘若将该光束的强度 I 取作1，那么，在通常的表示法中 $H=\cos\theta$ 和 $K=\sin\theta$，于是，光束的四个斯托克斯参数分别为：

$$I=1,\ Q=\cos 2\theta,\ U=\sin 2\theta\cos\Delta,\ V=\sin 2\theta\sin\Delta$$

假定光束现在通过一块通光面与 X 轴成 α 夹角的偏振片。则出射光束的斯托克斯列将是

$$1/2\begin{bmatrix}1 & \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & 0\\ ? & ? & ? & ?\\ ? & ? & ? & ?\\ ? & ? & ? & ?\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ \cos 2\theta\\ \sin 2\theta\cos\Delta\\ \sin 2\theta\sin\Delta\end{bmatrix}$$

$$=1/2\begin{bmatrix}1+\cos 2\theta\cos 2\alpha+\sin 2\theta\cos\Delta\sin 2\alpha\\ ?\\ ?\\ ?\end{bmatrix}$$

因此，若取 $2\alpha=\beta$，则出射光束的强度与下式

$$E=1+\cos 2\theta\cos\beta+\sin 2\theta\cos\Delta\sin\beta$$

成正比。当旋转该偏振片时，β 改变，强度也随之改变。当偏振片的通光面位于椭圆的长短轴中某一条轴线方向时，光束强度不是最大就是最小。所以将光强对 β 取微分且令该微分等于零，就能求得椭圆的长短轴的位置。微分的结果是

$$dE/d\beta=-\cos 2\theta\sin\beta+\sin 2\theta\cos\Delta\cos\beta$$

只要 $dE/d\beta=0$，即

$$\tan 2\alpha=\tan\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\sin 2\theta\cos\Delta}{\cos 2\theta}=\tan 2\theta\cos\Delta$$

时，那么光强不是最大就是最小。如果将该方程的两个解分别取为 2α 以及 $2\alpha+180°$，那么，相应的 α 的两个解便分别是 α 与 $\alpha+90°$，于是就给出了椭圆的长短轴的取向。若用 α 和 α^1 表示这两个解，则

$$\alpha^1=\alpha+90°$$

于是

$$\beta^1=2\alpha^1=\beta+180°$$

因此

$$\sin\beta^1=-\sin\beta \text{ 和 } \cos\beta^1=-\cos\beta$$

所以，这束与偏振片的第二个位置(正交的)相对应的光束强度为

$$E^1=1-\cos 2\theta\cos\beta-\sin 2\theta\cos\Delta\sin\beta$$

因此，两个光强之比将等于椭圆的长短轴的平方之比，其比值由下式给出

$$\frac{E^1}{E}=\frac{1-(\cos 2\theta\cos\beta+\sin 2\theta\cos\Delta\sin\beta)}{1+(\cos 2\theta\cos\beta+\sin 2\theta\cos\Delta\sin\beta)}$$

利用已知的 $\tan\beta$ 值，就能求得 $\cos\beta$ 和 $\sin\beta$ 的数值。将它们代入上式并加以简化，最后得

$$\frac{E^1}{E}=\frac{1-\sqrt{(1-\sin^2 2\theta\sin^2\Delta)}}{1+\sqrt{(1-\sin^2 2\theta\sin^2\Delta)}}$$

作为练习，建议学生用琼斯算法求解本题。我们在此已附带证明了椭圆的几何坐标问题，用几何方法来求解本题是十分困难的。

例题4 一束椭圆偏振光先通过一块1/4波片，再通过一块偏振片。当波片的快轴和偏振片的通光面分别向水平方向倾斜30°和60°时(30°和60°系指在同一个方向上测得的角度)，就会发生消光作用。试求该椭圆的取向及其长短轴之比。

解：倘若将给定的角度分别代入偏振片和1/4波片的琼斯矩阵的标准公式，那么，就能得到一个由一块偏振片与一块1/4波片按顺序串接起来时的组合装置的矩阵为

$$\underset{\text{(偏振片)}}{\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 3\end{bmatrix}}\underset{\text{(1/4 波片)}}{\frac{1}{4}\begin{bmatrix}3-i & \sqrt{3}(1+i)\\ \sqrt{3}(1+i) & 1-3i\end{bmatrix}}$$

$$=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}3+i & \sqrt{3}\,(1-i)\\ \sqrt{3}\,(3+i) & 3-3i\end{bmatrix}$$

假定入射光束的麦克斯韦列是

$$\begin{bmatrix}H\\ K\exp(i\Delta)\end{bmatrix}$$

如果现在指定该光束的强度等于1，那么，在通常的表示法中，则有

$$H=\cos\theta \text{ 和 } K=\sin\theta$$

于是，入射光束的麦克斯韦列是

$$\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\exp(i\Delta)\end{bmatrix}$$

由于已经产生了消光作用，所以，从组合装置出射的光束的麦克

斯韦列必须有两个矩阵元等于零，于是

$$\begin{bmatrix} 3+i & \sqrt{3}(1-i) \\ \sqrt{3}(3+i) & 3-3i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta\exp(i\Delta) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

现在假设，用一个 2×2 阶的方矩阵乘以一个列矩阵，来产生一个其两个元素都等于零的列矩阵，即

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

亦即 $AX+BY=0$ 和 $CX+DY=0$。

对一束椭圆偏振光来说，假定 X 与 Y 皆不为零，那么，从这些方程中立即可知

$$\frac{X}{Y}=-\frac{B}{A}=-\frac{D}{C}$$

在本题中

$$B=\sqrt{3}(1-i)\text{和 }A=3+i$$

于是

$$\frac{B}{A}=\frac{\sqrt{3}(1-i)}{3+i}=\frac{\sqrt{3}(1-i)(1+i)}{(3+i)(1+i)}=\frac{\sqrt{3}\times 2}{2+4i}=\frac{\sqrt{3}}{1+2i}$$

（学生应该证明这里的 D/C 也有同样的数值。）所以

$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta\exp(i\Delta)}=\frac{X}{Y}=-\frac{B}{A}=\frac{\sqrt{3}}{-2i-1}$$

因此，将上式颠倒，得

$$\frac{\sin\theta\cos\Delta+i\sin\theta\sin\Delta}{\cos\theta}=\frac{-2i-1}{\sqrt{3}}$$

其实部为

$$\tan\theta\cos\Delta=-1/\sqrt{3}$$

其虚部为

$$\tan\theta\sin\Delta=-2/\sqrt{3}$$

用第一个方程去除第二个方程，并约去 $\tan\theta$，得

$$\tan\Delta=\sin\Delta/\cos\Delta=2$$

于是

$$\Delta=63°26',\ \cos\Delta=0.447$$

从上述两个实部之间的方程中得

$$\tan\theta=\frac{-1}{1.732\times0.446}=-1.292$$

于是

$$\theta=-52°16'$$

根据上一个例题所推导的公式，得

$$\tan2\alpha=\tan2\theta\cos\Delta$$

所以

$$(\text{椭圆的长短轴之比})^2=\frac{1+\sqrt{(1-\sin^2 2\theta\sin^2\Delta)}}{1-\sqrt{(1-\sin^2 2\theta\sin^2\Delta)}}$$

当给定 α（椭圆的短轴与 x 轴之间的夹角）为 30° 时，则椭圆长短轴的长度之比为 $\sqrt{3}:1$。

例题 5 一束右旋圆偏振光垂直通过(a)一块 1/4 波片以及(b)一块 1/8 波片。并且这两块波片的快轴都处于垂直方向。试描述光束从每一块波片出射时的偏振状态。

解：圆偏振光有两个相等的分量 H 和 K，并且它们分别平行于两条轴线。对右旋圆偏振光，则 H 和 K 之间的相位差 Δ 等于 90°，于是，归一化的麦克斯韦列是

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1+(\cos\pi/2+i\sin\pi/2)\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}$$

对一块快轴为垂直方向的 1/4 波片，其琼斯矩阵可以写为

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&i\end{bmatrix}$$

所以，从 1/4 波片出射的光束的麦克斯韦列是

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ i\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$$

出射光束的麦克斯韦列中的第二个元素没有虚分量，所以，出射光束的 $\sin\Delta$ 必须为零，即 $\Delta=0$ 或 π。因为其实分量是负数，所以 Δ 必须等于 π，于是 $K=1$ 和 $H=1$。因此，光束是线偏振光，其振动与 X 轴成 $-45°$ 夹角，且处在第二和第四象限内。

对于 1/8 波片，它在寻常波与非常波之间所产生的相位差是 $45°$，因此 $\cos\delta$ 和 $\sin\delta$ 两者皆等于 $1/\sqrt{2}$。在这种情况下，$\theta=90°$，其琼斯矩阵可以写成

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\end{bmatrix}$$

于是，出射光束的麦克斯韦列为

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ i\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\ \frac{1}{\sqrt{2}}(i-1)\end{bmatrix}$$

从第二个分量的实部和虚部的比值中可以看出，$\tan\Delta=-1$，于是 $\Delta=135°$，$\sin\Delta=1/\sqrt{2}$ 以及 $\cos\Delta=-1/\sqrt{2}$。将这些值代入该矩阵，得 $H=1$ 和 $K=1$，于是，应用椭圆方程的标准形式

$$\frac{x^2}{H^2}-\frac{2xy}{HK}\cos\Delta+\frac{y^2}{K^2}=\sin^2\Delta$$

得

$$\frac{x^2}{1^2}-\frac{2xy}{1\times1\times\sqrt{2}}+\frac{y^2}{1^2}=1$$

即

$$x^2-\sqrt{2}(xy)+y^2=1$$

因为 Δ 角介于 $0°$ 和 $180°$ 之间，所以这个椭圆处于右旋状态。

例题6 一束光的两个分量分别为

$$x=A\cos(\omega t+\pi/4) \text{ 和 } y=A\cos\omega t$$

这束光入射到一块偏振片上，并使该偏振片在其本身的平面上

旋转，直到透过的光强为最大。试问

(a) 该偏振片的通光面现在处于什么方向?

(b) 计算偏振片在现在的(a)取向时与通光面处在 Y 方向时所透过的光强之比。

解：可以用米勒矩阵或琼斯矩阵求得该偏振片在任何取向时的光强。在米勒公式中，有

$$H=A,\ K=A,\ \Delta=-\pi/4$$

所以

$$I=2A^2,\ Q=0,\ U=2A^2\cos\pi/4,\ v=-2A^2\sin\pi/4$$

现在令光束通过一块夹角为 θ 的偏振片，并求出所透过的光强。注意，这里仅需利用偏振片的米勒矩阵的第一行。所得到的强度为

$$I_1=1/2[1\quad \cos 2\theta\quad \sin 2\theta\quad 0]\begin{bmatrix}2A^2\\0\\\sqrt{2}A^2\\-\sqrt{2}A^2\end{bmatrix}$$

$$=A^2(1+\sin 2\theta/\sqrt{2})$$

显然，当 $\sin 2\theta=1$ 即 $\theta=45°$ 时，I_1 有最大值。于是 I_1 为

$$A^2(1+1/\sqrt{2})$$

当通光面处于 Y 方向时，$\theta=90°$，于是 $\sin 2\theta=0$，光强则为

$$A^2$$

因此，两个光强之比为

$$1.707:1$$

如果希望用琼斯算法来求光强，那么，首先得列出初始光束的麦克斯韦列。即

$$\begin{bmatrix}A\\A\exp(-i\pi/4)\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}1\\\exp(-i\pi/4)\end{bmatrix}$$

光束通过夹角为 θ 的偏振片之后，其麦克斯韦列变成

$$A\begin{bmatrix}\cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta\\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ \exp(-i\pi/4)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta\exp(-i\pi/4)\\ \sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta\exp(-i\pi/4)\end{bmatrix}$$

通常用该麦克斯韦列的复共轭转置与其本身相乘，求得

$$\text{光强}=A^2[\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta\exp(+i\pi/4)\quad \sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta\exp(+i\pi/4)]$$

$$\times\begin{bmatrix}\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta\exp(-i\pi/4)\\ \sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta\exp(-i\pi/4)\end{bmatrix}$$

相乘后，得到同前面一样的结果，即

$$A^2(1+\sin 2\theta/\sqrt{2})$$

例题7 有一束右旋椭圆偏振光，用 H 表示该椭圆的长轴，K 表示其短轴。这束光落到一块偏振片上，该偏振片的通光面与椭圆的长轴成 α 夹角。

试证明通过偏振片后的光束强度为

$$I=H^2\cos^2\alpha+K^2\sin^2\alpha$$

解：倘若将椭圆的长轴取为水平方向，那么，入射光束的麦克斯韦列是

$$\begin{bmatrix}H\\ K\exp(i\pi/2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}H\\ iK\end{bmatrix}$$

（见附录 C 的第(4)类光。）用偏振片的琼斯矩阵乘以上式，便得到光束通过偏振片以后的麦克斯韦列。其结果为

$$\begin{bmatrix}\sin^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha\\ \sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}H\\ iK\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}H\cos^2\alpha+iK\sin\alpha\cos\alpha\\ H\sin\alpha\cos\alpha+iK\sin^2\alpha\end{bmatrix}$$

用该麦克斯韦列的复共轭转置与其本身相乘，便得到光束强度

$$[H\cos^2\alpha - iK\sin\alpha\cos\alpha \qquad H\sin\alpha\cos\alpha - iK\sin^2\alpha]$$
$$\times\begin{bmatrix} H\cos^2\alpha + iK\sin\alpha\cos\alpha \\ H\sin\alpha\cos\alpha + iK\sin^2\alpha \end{bmatrix}$$

将上式相乘并简化，以得到所需要的结果。

有趣的是，用一个光电池来测量光强，便可从实验上容易地检验这个结果。因此，我们便得到了关于椭圆偏振光理论的直接证实。用椭圆的几何坐标方法也可以证明这个结果，但不如上述方法那么简便。（就左旋偏振光而言，其算法与上述算法十分相似，只不过是在出现 i 的数项中将其符号改变而已。但是，一旦求出括号积，这些虚数项就会消掉。）

例题 8 试用麦克斯韦列和琼斯矩阵推导光弹性理论。

解：最简便的情况是考虑两块偏振片与 X 轴分别互成 45° 和 $-45°$ 角（通常惯例就是如此）。假定用的是一束 $H=K=1$（于是强度等于 2）的平面偏振光，那么，初始光束的麦克斯韦列为

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

对于第一块偏振片来说，$\theta=45°$，于是，$\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 两者皆等于 $1/\sqrt{2}$，所以，其琼斯矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = 1/2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

而第二块偏振片的 $\theta=-45°$，于是，$\cos\theta=1/\sqrt{2}$，但

$$\sin\theta=-1/\sqrt{2},$$

所以，其琼斯矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = 1/2\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

（表 4 列出了这个矩阵。）当利用关于一般线性延迟器的表示式

来表示处于任何位置上的样品所起的作用时，出射光束的麦克斯韦列便为

$$E=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

（第二块偏振片）

$$\times\begin{bmatrix}\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\exp(-i\delta) & \cos\alpha\sin\alpha(1-\exp(-i\delta))\\ \cos\alpha\sin\alpha(1-\exp(-i\delta)) & \sin^2\alpha+\cos^2\alpha\exp(-i\delta)\end{bmatrix}$$

（相板）

$$\times\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

（第一块偏振片）（初始光束）

相乘后，最终得

$$(1/2)\cos 2\alpha(1-\exp(-i\delta))\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}=G\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$$

如前所述，为了得到出射光束的强度，可以用出射光束的麦克斯韦列与其复共轭转置相乘，得

$$光强=\bar{E}E=\bar{G}G[1 \quad -1]\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}=2\bar{G}G$$

经运算后，得

$$光强=2\cos^2 2\alpha\sin^2\delta/2=I,$$

因为初始光强 $I_0=2$，所以 I 为

$$I=I_0\cos^2 2\alpha\sin^2(\delta/2)$$

应当指出，上式和用米勒矩阵解题所得的式子不同；上式出现的是 $\cos^2 2\alpha$，并不是 $\sin^2 2\alpha$。这是因为我们将两块偏振片的通光面都不是选择在水平和垂直方向，而是与 X 轴分别成 45° 和 −45° 夹角的缘故。当 $\cos^2 2\alpha=0$ 时，意味着相板的光轴与其中一块偏振片的通光面相平行。

现在来看加入两块1/4波片所起的作用。因为这两块1/4波片是相互垂直的，但是又与两块偏振片的通光面互成45°角，所以其中的一块波片必定处在水平方向，而另一块波片必定处在垂直方向。若将第一块波片的快轴取为垂直方向，则$\theta=90°$，$\cos\theta=0$，$\sin\theta=1$以及$\delta=\pi/2$，于是$\exp(i\delta)=i$。利用表4中给出的这些数值，便求得第一块波片的矩阵，即

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & i\end{bmatrix}\text{或是另一个}\begin{bmatrix}-i & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

对于第二块1/4波片，其$\theta=0°$，于是，$\cos\theta$和$\sin\theta$两者的数值互换，其矩阵变成

$$\begin{bmatrix}i & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\text{或是另一个}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -i\end{bmatrix}$$

当利用前面所说的初始光束时，便可求得出射光束的麦克斯韦列为

$$E=\frac{1}{2}\underset{\text{(第二块偏振片)}}{\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}}\ \underset{\text{(第二块}\lambda/4\text{片)}}{\begin{bmatrix}i & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}}$$

$$\times\underset{\text{(对夹角}\theta\text{滞后}\delta\text{)}}{\begin{bmatrix}C_1^2+S_1^2e^{-i\delta} & C_1S_1(1-e^{-i\delta})\\ C_1S_1(1-e^{-i\delta}) & S_1^2+C_1^2e^{-i\delta}\end{bmatrix}}$$

$$\times\underset{\text{(第一块}\lambda/4\text{片)}}{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & i\end{bmatrix}}\ \underset{\text{(第一块偏振片)}}{\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}}\ \underset{\text{(45°偏振的输入光束)}}{\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}}$$

在上述有关延迟器的矩阵中，利用符号C_1和S_1分别表示$\cos\theta$和$\sin\theta$。在下一步计算中，将矩阵列的两端简化，并代入$e^{-i\delta}=\beta-i\mu$，其中$\beta=\cos\delta$和$\mu=\sin\delta$。其结果为

$$
\begin{aligned}
E=&\frac{1}{2}\begin{bmatrix} i & -1 \\ -i & 1 \end{bmatrix} \\
&\times\begin{bmatrix} C_1^2+S_1^2\beta-iS_1^2\mu & C_1S_1(1-\beta)+iC_1S_1\mu \\ C_1S_1(1-\beta)+iC_1S_1\mu & S_1^2+C_1^2\beta-iC_1^2\mu \end{bmatrix} \\
&\times\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \\
=&\frac{1}{2}\begin{bmatrix} i & -1 \\ -i & 1 \end{bmatrix} \\
&\times\begin{bmatrix} (C_1^2+S_1^2\beta-C_1S_1\mu)+i(C_1S_1-C_1S_1\beta-S_1^2\mu) \\ (C_1S_1-C_1S_1\beta+C_1^2\mu)+i(S_1^2+C_1^2\beta+C_1S_1\mu) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

相乘后得到输出光束的麦克斯韦列

$$
E=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} (-S_2(1-\beta)-C_2\mu)+i(C_2(1-\beta)-S_2\mu) \\ (S_2(1-\beta)+C_2\mu)+i(-C_2(1-\beta)+S_2\mu) \end{bmatrix}
$$

（式中，$C_2=\cos 2\theta$ 以及 $S_2=\sin 2\theta$）。

注意，这个列除了符号改变以外，E_x 和 E_y 两个分量都是相同的；对我们所讨论的光束而言，当它刚从成 $-45°$ 夹角的偏振片出射时，其结果必然如此。用这个列的复共轭与任何一个矩阵元相乘，最后求得光束强度为

$$
\begin{aligned}
I&=\frac{1}{2}(S_2(1-\beta)+C_2\mu)^2+\frac{1}{2}(S_2\mu-C_2(1-\beta))^2 \\
&=\frac{1}{2}(1-\beta)^2+\frac{1}{2}\mu^2=1-\beta
\end{aligned}
$$

上式也可以重新表示成

$$
I=2\sin^2(\delta/2)
$$

（它与角 θ 值无关）。

因为初始光强 $I=2$，于是

$$
I_{输出}=I_{输入}\times\sin^2(\delta/2),
$$

这与采用米勒算法所得的结果相同。

我们认为，除非是处理一束由两束光以上的多束光组合而成的相干光束，一般情况下还是采用米勒算法比较方便，因为米勒矩阵元全部都是实数。

第五章　光在晶体中的传播

5.1 引　　言

众所周知，当一束光通过某些类型的晶体时，将会发生双折射现象，初始光束会产生出两束偏振状态各不相同的光束。这种现象可以用菲涅耳-惠更斯作图法来描述，也就是说，可以用两个惠更斯波面来描述，其中一个波面是椭球面，它表示非常波，另一个波面是球面，它表示寻常波。根据光的电磁场理论，假设晶体的电介常数或电容率不是一个纯量，而是一个张量，其分量可以用一个矩阵来表示，那么便可以解释球面和椭球面的存在。

为了弄清这种现象是如何发生的，我们不采用张量分析的方法，而是首先将通常的矢量分析表示成矩阵形式，然后假设光波所通过的介质是一种晶体，这样便可得到麦克斯韦方程组的矩阵表示式，最后解麦克斯韦方程组，其结果将会给出一些大家熟悉的有关光在某些晶体中传播的特性。我们在这里只限于讨论单轴晶体的情况。

5.2 矢量运算的矩阵表示法

5.2.1

有一个矢量 $\boldsymbol{V}$，其分量为 V_1, V_2 和 V_3，它们分别平行于 x, y 和 z 轴，则 $\boldsymbol{V}$ 可表示为：

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{i}V_1+\boldsymbol{j}V_2+\boldsymbol{k}V_3$$

式中，$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 分别为 x, y 和 z 轴正方向上的单位矢量。

现在定义四个矩阵，其中两个为行矩阵，两个为列矩阵，它们分别为：

$$\boldsymbol{V}=\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \qquad V^T=V \text{ 的转置矩阵}[V_1 \quad V_2 \quad V_3]$$

$$A=\begin{bmatrix} \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{k} \end{bmatrix} \qquad A^T=[\boldsymbol{i} \quad \boldsymbol{j} \quad \boldsymbol{k}]$$

矢量 $\boldsymbol{V}$ 的定义方程现在可以写成如下形式

$$\boldsymbol{V}=[\boldsymbol{i} \quad \boldsymbol{j} \quad \boldsymbol{k}]\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}=A^TV$$

或为

$$\boldsymbol{V}=[V_1 \quad V_2 \quad V_3]\begin{bmatrix} \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{k} \end{bmatrix}=V^TA$$

5.2.2

纯量积可以表示如下。如果有另一个矢量 $\boldsymbol{U}$，它定义为

$$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{i}U_1+\boldsymbol{j}U_2+\boldsymbol{k}U_3$$

$$=A^TU \qquad \text{式中 } U=\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}$$

$$=U^TA \qquad \text{式中 } U^T=[U_1 \quad U_2 \quad U_3]$$

于是，$\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 的纯量积等于

$$\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{U}=U_1V_1+U_2V_2+U_3V_3$$

或者将纯量积写成

$$[U_1 \quad U_2 \quad U_3]\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = U^T V$$

或

$$[V_1 \quad V_2 \quad V_3]\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = V^T U$$

6.2.3

两个矢量的矢量积可以写成

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V}\times\boldsymbol{U} &= \boldsymbol{i}(V_2U_3 - V_3U_2) \\ &\quad + \boldsymbol{j}(V_3U_1 - V_1U_3) + \boldsymbol{k}(V_1U_2 - V_2U_1) \\ &= V_1(-\boldsymbol{j}U_3 + \boldsymbol{k}U_2) + V_2(\boldsymbol{i}U_3 - \boldsymbol{k}U_1) \\ &\quad + V_3(-\boldsymbol{i}U_2 + \boldsymbol{j}U_1) \end{aligned}$$

可以将上式写为

$$\begin{aligned} &[V_1 \quad V_2 \quad V_3]\begin{bmatrix} -\boldsymbol{j}U_3 + \boldsymbol{k}U_2 \\ \boldsymbol{i}U_3 + \boldsymbol{k}U_1 \\ -\boldsymbol{i}U_2 + \boldsymbol{j}U_1 \end{bmatrix} \\ &= [V_1 \quad V_2 \quad V_3]\begin{bmatrix} 0 & +\boldsymbol{k} & -\boldsymbol{j} \\ -\boldsymbol{k} & 0 & +\boldsymbol{i} \\ +\boldsymbol{j} & -\boldsymbol{i} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = V^T \alpha U \end{aligned}$$

式中

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & +\boldsymbol{k} & -\boldsymbol{j} \\ -\boldsymbol{k} & 0 & +\boldsymbol{i} \\ +\boldsymbol{j} & -\boldsymbol{i} & 0 \end{bmatrix}$$

(同理，$\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{U} = U^T\alpha^T V$，其中 $\alpha^T = \alpha$ 的转置)

$$\alpha^T = \begin{bmatrix} 0 & -\boldsymbol{k} & +\boldsymbol{j} \\ +\boldsymbol{k} & 0 & -\boldsymbol{i} \\ -\boldsymbol{j} & +\boldsymbol{i} & 0 \end{bmatrix} = -\alpha$$

这里需要用到一些矩阵，在这些矩阵里，各个元素不是表示纯量而是微分算子，例如偏导数$\partial/\partial x$。在使用这些算子时，应当记住，当算子服从分配律时，

$$\frac{\partial}{\partial x}(A)+\frac{\partial}{\partial x}(B)=\frac{\partial}{\partial x}(A+B)$$

就一定不能再利用可交换律。例如$U\dfrac{\partial(V)}{\partial x}$并不等于$\dfrac{\partial}{\partial x}U(V)$，除非$U$和$x$无关。

现在用矩阵表示法来表示纯量ϕ的梯度，以及矢量$\boldsymbol{V}$的散度和旋度。

5.2.4

纯量ϕ的梯度由下式给出

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}\phi&=\boldsymbol{i}\partial\phi/\partial x+\boldsymbol{j}\partial\phi/\partial y+\boldsymbol{k}\partial\phi/\partial z\\&=[\boldsymbol{i}\quad\boldsymbol{j}\quad\boldsymbol{k}]\begin{bmatrix}\partial\phi/\partial x\\\partial\phi/\partial y\\\partial\phi/\partial z\end{bmatrix}\\&=[\boldsymbol{i}\quad\boldsymbol{j}\quad\boldsymbol{k}]\begin{bmatrix}\partial/\partial x\\\partial/\partial y\\\partial/\partial z\end{bmatrix}\phi=A^TG\phi\end{aligned}$$

式中 $G=\begin{bmatrix}\partial/\partial x\\\partial/\partial y\\\partial/\partial z\end{bmatrix}$和$G^T=[\partial/\partial x\quad\partial/\partial y\quad\partial/\partial z]$

5.2.5

矢量$\boldsymbol{V}$的散度为

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\boldsymbol{V}&=\partial V_1/\partial x+\partial V_2/\partial y+\partial V_3/\partial z\\&=[\partial/\partial x\quad\partial/\partial y\quad\partial/\partial z]\begin{bmatrix}V_1\\V_2\\V_3\end{bmatrix}=G^TV\end{aligned}$$

5.2.6

矢量 $\boldsymbol{V}$ 的旋度为

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{V}=\boldsymbol{i}(\partial V_3/\partial y-\partial V_2/\partial z)+\boldsymbol{j}(\partial V_1/\partial z-\partial V_3/\partial x)$$
$$+\boldsymbol{k}(\partial V_2/\partial x-\partial V_1/\partial y)$$
$$=[\boldsymbol{i}\quad\boldsymbol{j}\quad\boldsymbol{k}]\begin{bmatrix}\partial V_3/\partial y-\partial V_2/\partial x\\ \partial V_1/\partial z-\partial V_3/\partial x\\ \partial V_2/\partial x-\partial V_1/\partial y\end{bmatrix}$$
$$=[\boldsymbol{i}\quad\boldsymbol{j}\quad\boldsymbol{k}]\begin{bmatrix}0 & -\partial/\partial z & +\partial/\partial y\\ +\partial/\partial x & 0 & -\partial/\partial x\\ -\partial/\partial y & +\partial/\partial x & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1\\ V_2\\ V_3\end{bmatrix}$$
$$=A^T\Delta V$$

式中

$$\Delta=\begin{bmatrix}0 & -\partial/\partial z & +\partial/\partial y\\ +\partial/\partial z & 0 & -\partial/\partial x\\ -\partial/\partial y & +\partial/\partial x & 0\end{bmatrix}$$

现在用矩阵方法来证明一些众所周知的恒等式。

5.2.7

若 $\operatorname{div}\boldsymbol{V}=\theta$(纯量),则 $\theta=G^TV$(见 5.2.5)

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}V=\operatorname{grad}\theta=A^TG\theta(\text{见 } 5.2.4)=A^TGG^TV$$
$$=A^T\begin{bmatrix}\partial/\partial x\\ \partial/\partial y\\ \partial/\partial z\end{bmatrix}=[\partial/\partial x\quad\partial/\partial y\quad\partial/\partial z]V$$
$$=A^T\begin{bmatrix}\partial^2/\partial x^2 & \partial^2/\partial x\partial y & \partial^2/\partial x\partial z\\ \partial^2/\partial y\partial x & \partial^2/\partial y^2 & \partial^2/\partial y\partial z\\ \partial^2/\partial z\partial x & \partial^2/\partial z\partial y & \partial^2/\partial z^2\end{bmatrix}V$$
$$=A^TMV$$

(经检查,M 就是 M 本身的转置,即 $M^T=M$。)

5.2.8

矢量 V 的矩阵形式是 A^TV (见 (5.2.1)。其旋度 C 是 $A^T\Delta V$，即 $A^T\Delta$ 乘 V，其中 V 则是把 V 的矩阵即 A^TV 中的前面一个因子 A^T 去掉后所剩下的因子。因此

$$T = \mathrm{curl}\,\mathrm{curl}\,V = \mathrm{curl}\,C = A^T\Delta(\Delta V)$$

$$= A^T\begin{bmatrix} 0 & -\partial/\partial z & +\partial/\partial y \\ +\partial/\partial z & 0 & -\partial/\partial x \\ -\partial/\partial y & +\partial/\partial x & 0 \end{bmatrix}$$

$$\times\begin{bmatrix} 0 & -\partial/\partial z & +\partial/\partial y \\ +\partial/\partial z & 0 & -\partial/\partial x \\ -\partial/\partial y & +\partial/\partial x & 0 \end{bmatrix} V$$

$$= A^T\begin{bmatrix} -\partial^2/\partial z^2 - \partial^2/\partial y^2 & +\partial^2/\partial x\partial y & +\partial^2/\partial x\partial z \\ +\partial^2/\partial x\partial y & -\partial^2/\partial z^2 - \partial^2/\partial x^2 & +\partial^2/\partial z\partial y \\ +\partial^2/\partial x\partial z & +\partial^2/\partial y\partial z & -\partial^2/\partial y^2 - \partial^2/\partial x^2 \end{bmatrix} V$$

$$= A^T(M - L)V$$

式中

$$L = \begin{bmatrix} \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2 & 0 & 0 \\ 0 & \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial z^2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2 \end{bmatrix}$$

5.2.9

$\mathrm{curl}\,\mathrm{grad}\,\theta$(即 θ 的任意纯量点函数)

$= \mathrm{curl}(A^TG\theta)$(见 5.2.4)

$= A^T\Delta G\theta$(见 5.2.6)

$$= A^T \begin{bmatrix} 0 & -\partial/\partial z & +\partial/\partial y \\ +\partial/\partial z & 0 & -\partial/\partial x \\ -\partial/\partial y & +\partial/\partial x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{bmatrix} \theta$$

$$= A^T \begin{bmatrix} -\partial^2/\partial z\partial y + \partial^2/\partial y\partial z \\ +\partial^2/\partial z\partial x - \partial^2/\partial x\partial z \\ -\partial^2/\partial y\partial x + \partial^2/\partial x\partial y \end{bmatrix} \theta$$

$$= A^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \theta = 0$$

5.2.10

$\text{div curl } \boldsymbol{V} = \text{div}(A^T \Delta V)$（见 5.2.6）$= G^T \Delta V$（见 5.2.5）

$$= [\partial/\partial x \quad \partial/\partial y \quad \partial/\partial z] \begin{bmatrix} 0 & -\partial/\partial z & +\partial/\partial y \\ +\partial/\partial z & 0 & -\partial/\partial x \\ -\partial/\partial y & +\partial/\partial x & 0 \end{bmatrix} V$$

$$= [(+\partial^2/\partial y\partial z - \partial^2/\partial z\partial y) \quad (-\partial^2/\partial x\partial z + \partial^2/\partial z\partial x \cdots$$

$$\cdots \qquad (-\partial^2/\partial x\partial y + \partial^2/\partial y\partial x V)$$

$$= [0 \quad 0 \quad 0] V = 0$$

5.3 各向异性介质的介电特性

5.3.1 麦克斯韦方程组的矩阵表示法和电场波动方程的推导

假设读者已经熟悉麦克斯韦方程组的物理概念，而且已经见到过这些方程组的矢量表示形式。利用上一节已经推得的表达式，不难看出，这四个方程组可以分别写成如下的矩阵形式：

$$\text{div } \boldsymbol{D} = 0 \text{ 变为 } G^T D = 0 \text{（见 5.2.5节）} \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned} \text{div } \boldsymbol{B} = 0 &\text{ 变为 } G^T B = 0 \\ \text{div } \boldsymbol{H} = 0 &\text{ 变为 } G^T H = 0 \end{aligned} \tag{5.2}$$

(假设讨论的问题局限于磁各向同性范围内，那么 div $\boldsymbol{B}$ 为零，意味着 div $\boldsymbol{H}$ 也为零。)

curl $\boldsymbol{E}=-\partial\boldsymbol{B}/\partial t$ 变成 $A^T\Delta E=-\partial\boldsymbol{B}/\partial t$(见 5.2.6 节)

(5.3)

curl $\boldsymbol{H}=\partial\boldsymbol{D}/\partial t$ 变成 $A^T\Delta H=\partial\boldsymbol{D}/\partial t$ (5.4)

现在来推导电场的一般波动方程。假设所有的电场矢量都是随时间作正弦变化，例如，电场是由下式给出的：

$$\varepsilon=\boldsymbol{E}\sin(\omega t+\theta)$$

式中，ω 为角频率，θ 为相位角。于是

$$d\varepsilon/dt=\omega\boldsymbol{E}\cos(\omega t+\theta)$$

和

$$d^2\varepsilon/dt^2=-\omega^2\boldsymbol{E}\sin(\omega t+\theta)=-\omega^2\varepsilon$$

因此，对时间的二次微分等价于用 $-\omega^2$ 与上式相乘。

5.3.2 用矩阵推导波动方程

从方程(5.3)中得

$$A^T\Delta E=-\partial\boldsymbol{B}/\partial t=-A^T\partial B/\partial t,\text{其中 } B=\begin{bmatrix}B_1\\B_2\\B_3\end{bmatrix}$$

对上述等式两边作旋度计算，并注意到微分的次序是无关紧要的，于是

$$\begin{aligned}A^T\Delta(\Delta E)&=-A^T\Delta\partial B/\partial t=-\mu A^T\Delta\partial H/\partial t\text{(见 5.2.6 节)}\\&=-\mu\partial/\partial t(A^T\Delta H)\\&=-\mu\partial/\partial t(\partial\boldsymbol{D}/\partial t)\text{(用 5.4 方程)}\\&=-\mu\partial^2\boldsymbol{D}/\partial t^2=\mu\omega^2\boldsymbol{D}\end{aligned}$$

因此

$$A^T(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{L})E=\mu\omega^2A^TD\quad\text{(见 5.2.8 节)}$$

迄今，所有的论述都是十分一般性的，而且它可以应用于任

何类型的介质。现在假设，这里所考虑的情况都是光波通过各向异性介质传播时的情况。各向异性意味着，电容率 K 不是一个一般的纯量，所以不能使用方程 $D=KE$。而是 $\boldsymbol{D}$ 的每个分量都与 $\boldsymbol{E}$ 的所有三个分量都有关，于是，方程 $D=KE$ 就要变为

$$
\begin{aligned}
D_1 &= K_{11}E_1 + K_{12}E_2 + K_{13}E_3 \\
D_2 &= K_{21}E_1 + K_{22}E_2 + K_{23}E_3 \\
D_3 &= K_{31}E_1 + K_{32}E_2 + K_{33}E_3
\end{aligned}
$$

即

$$
\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{22} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}
$$

或

$$
\boldsymbol{D} = K\boldsymbol{E}
$$

式中，K 现在是一个方矩阵。而且，根据能量守恒定律可以证明：矩阵 $\boldsymbol{K}$ 具有对称性，且只要适当选择轴线，$\boldsymbol{K}$ 便可变为对角矩阵；也就是说，K 的所有非对角元素都变为零。假设现在已经做到这一点，那么，D 和 E 之间的连接关系就变为

$$
\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & 0 \\ 0 & 0 & K_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}
$$

波动方程现在变成

$$
A^T(M-L)E = \mu\omega^2 A^T K E
$$

μ 和 ω 皆是常量，因此，现在将它们组合成矩阵 $\boldsymbol{K}$ 是方便的。现在来定义一个新的矩阵 S，即

$$
S = \mu\omega^2 K
$$

亦即

$$\begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 \\ 0 & 0 & S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu\omega^2 K_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu\omega^2 K_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu\omega^2 K_3 \end{bmatrix}$$

也可以写为 $M-L=P$，式中 P 是一个新的矩阵

$$P=M-L$$

$$=\begin{bmatrix} \left(\dfrac{-\partial^2}{\partial y^2}-\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right) & \dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2}{\partial z\partial x} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y} & \left(\dfrac{-\partial^2}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right) & \dfrac{\partial^2}{\partial y\partial z} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x\partial z} & \dfrac{\partial^2}{\partial y\partial z} & \left(-\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \end{bmatrix}$$

于是，波动方程变成

$$A^T(S-P)E=0 \tag{5.6}$$

这是 $\boldsymbol{E}$ 的波动方程的一般形式。因为以后的讨论中要用到 $\boldsymbol{H}$ 的方程，所以现在要弄清楚，当已知电场 $\boldsymbol{E}$ 的数值后，如何求得 $\boldsymbol{H}$。麦克斯韦方程组中的一个方程是

$$\text{curl}\,\boldsymbol{E}=\frac{-\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}=-\mu\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$$

$$\boldsymbol{H}=-\left(\frac{1}{\mu}\right)\int \text{curl}\,\boldsymbol{E}dt$$

由于 $\boldsymbol{E}$(或 $\boldsymbol{H}$)对时间的微分相当于用 ω 乘原方程且其相位角超前 $\pi/2$，因此，它们对时间的积分也相当于用 ω 去除原方程，且相位角滞后 $\pi/2$。所以，如果忽略相位因子不计，则

$$H=\left(\frac{1}{\mu\omega}\right)\text{curl}\,\boldsymbol{E}=\left(\frac{1}{\mu\omega}\right)A^T\Delta E \tag{5.7}$$

现在使用这种体系来研究平面波在单轴晶体中传播的各种情况。

5.4 平面波在单轴晶体中的传播

读者也许会了解，在单轴晶体中，几乎在所有的方向上都可能有两个平面波分别以不同的速度通过晶体，不过，在晶体的光轴方向上，只可能有一个平面波。在有两个平面波的情况下，这两个波的偏振态总是相互垂直的。与球面惠更斯子波相对应的寻常波，总是一个振动与其主截面相垂直的偏振波；而与椭球面惠更斯子波相对应的非常波，则总是另一个振动处在其主截面内的偏振波。现在用新近推得的电磁理论的矩阵式，来推导这些结果。首先考虑两种特殊情况，即相当于两种分别沿着或垂直于晶体光轴传播的平面波。

5.4.1 第一种特殊情况——平面波平行于光轴传播

在我们所考虑的波面中，E 和 H 两个数值在整个垂直于 x 轴的平面上都是均匀的，而 x 轴与电容率矩阵中对角元素 K_1 的特殊数值有关。根据定义，对于这些波面而言，所有的 y 和 z 的导数都为零，于是，矩阵 P 变成

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\partial^2/\partial x^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\partial^2/\partial x^2 \end{bmatrix}$$

因此，$\boldsymbol{E}$ 的波动方程变为

$$A^T\begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_2+\partial^2/\partial x^2 & 0 \\ 0 & 0 & S_2+\partial^2/\partial x^2 \end{bmatrix}E=0$$

相乘后，得

$$\boldsymbol{i}S_1E_1+\boldsymbol{j}(S_2E_2+\partial^2E_2/\partial x^2)+\boldsymbol{k}(S_2E_3+\partial^2E_3/\partial x^2)=0$$

在这个方程中，唯有一个 $\boldsymbol{i}$ 项，这样，E_1 必须为零。换句话说，不存在 $\boldsymbol{E}$ 在 x 方向的分量，而 x 方向就是与波面相垂直的方

向，所以，这里的 $\boldsymbol{E}$ 是一个纯粹的横波。

将 S_2 的值代入 K_2 项，并记住，用 $-\omega^2$ 去乘原方程相当于把方程对时间取二次微分，令左端的 y 和 z 分量都等于零，得到

$$\frac{\partial^2 E_2}{\partial x^2}=\mu K_2\frac{\partial^2 E_2}{\partial t^2} \text{ 和 } \frac{\partial^2 E_3}{\partial x^2}=\mu K_2\frac{\partial^2 E_3}{\partial t^2}$$

将上式与标准的波动方程相比较

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=\frac{1}{V^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$$

可以看到，$\boldsymbol{E}$ 的 y 和 z 两个分量皆沿着 x 方向传播，其速度为 $1/\sqrt{(\mu K_2)}$。

根据已经建立的 $\boldsymbol{H}$ 的一般公式，以及 E 的所有 y 和 z 的导数现在皆为零的事实，求得

$$\boldsymbol{H}=(1/\mu\omega)A^T\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\partial/dx\\ 0 & +\partial/dx & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ E_2\\ E_3\end{bmatrix}$$
$$=(1/\mu\omega)[-\boldsymbol{j}\partial E_3/\partial x+\boldsymbol{k}\partial E_2/\partial x]$$

从该方程中可以看到：(a)不存在 $\boldsymbol{H}$ 的 x 分量，也就是说，象 $\boldsymbol{E}$ 一样，$\boldsymbol{H}$ 也是纯粹的横波；(b)若 E_2 等于零，则 $\boldsymbol{H}$ 只纯粹处于 y 方向；而若 E_3 等于零，则 $\boldsymbol{H}$ 只纯粹处于 z 方向。这样就可以认为 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 两者互相垂直。(c)对于那些在传播中不改变波形的光波而言，$\partial E_2/\partial x$ 波必须以和 E_2 同样的速度传播，对 E_3 波也同样如此。所以，$\boldsymbol{H}$ 的 y 和 z 两个分量的传播速度都和 $\boldsymbol{E}$ 一样，即速度等于 $1/(\mu K_2)$。因此，对全寻常波面和全非常波面而言，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 两者都以同样的速度沿该方向传播。这一点与我们熟悉的事实，即沿着单轴晶体光轴方向传播的波面不存在双折射现象是一致的。

5.4.2 平面波通过单轴晶体的第二种特殊情况

现在来考虑平面波面与 z 轴相垂直的情况，于是所有 x 和 y 的导数都为零。根据对称性，同样地，对垂直于 y 轴的波面，因为 S_2 与 S_3 相等，于是只要简单地将上面所得结果中的 y 与 z 两者互换，便可得到所需结果。因为 $\operatorname{div} \boldsymbol{H}=0$，且假设 x 和 y 的导数都为零，所以 $\partial H_3/\partial z=0$，即就变化的电场而言，$H_3$ 为零；换句话说，$\boldsymbol{H}$ 在这里纯粹是横波。矩阵 P 变为

$$
\begin{bmatrix}
\partial^2/\partial z^2 & 0 & 0 \\
0 & -\partial^2/\partial z^2 & 0 \\
0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

以及方程(5.6)变为

$$
A^T\begin{bmatrix}
S_1+\partial^2/\partial z^2 & 0 & 0 \\
0 & S_2+\partial^2/\partial z^2 & 0 \\
0 & 0 & S_2
\end{bmatrix}E=0
$$

即

$$
\boldsymbol{i}(S_1+\partial^2/\partial z^2)E_1+\boldsymbol{j}(S_2+\partial^2/\partial z^2)E_2+\boldsymbol{k}S_2E_3=0
$$

上式含 $\boldsymbol{k}$ 的只有一项，所以 E_3 为零。因为 $\boldsymbol{E}$ 不存在 z 分量，所以同 $\boldsymbol{H}$ 一样，$\boldsymbol{E}$ 也纯粹是横波。令方程式中另外两项都等于零，将 S_1 和 S_2 的数值都代入，并记住，用 $-\omega^2$ 去乘所得结果时，相当于将所得结果对时间作二次微分，于是，可以得到两个方程：

$$
\partial^2E_1/\partial z^2=\mu K_1\partial^2E_1/\partial t^2 \text{ 和 } \partial^2E_2/\partial z^2=\mu K_2\partial^2E_2/\partial t^2
$$

然后再将上述两个方程与一般波动方程相比较，就会看出，E_1 和 E_2 就是沿着 z 方向传播的两个平面波，只不过两者的速度不同而已，E_1 的速度为 $1/\sqrt{(\mu K_1)}$，而 E_2 的速度为 $1/\sqrt{(\mu K_2)}$。因此，E_2 沿着 z 轴的传播速度和 E_2 及 E_3 两者沿着 x 方向传播的速度都相同。所以，刚才得到的两个波，它们的偏振态相互垂直，并以不同的速度沿着 z 方向传播。可以证明，E_2 与寻常波面有关，而 E_1 与非常波面有关。现在再次使用

$\boldsymbol{H}$ 的一般方程，并记住，所有的 x 和 y 的导数以及 E_3 都为零。因此，$\boldsymbol{H}$ 的方程变为

$$\boldsymbol{H}=(1/\mu\omega)[\boldsymbol{i}\quad \boldsymbol{j}\quad \boldsymbol{k}]\begin{bmatrix} 0 & -\partial/\partial z & 0 \\ +\partial/\partial z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

即

$$\boldsymbol{H}=-\boldsymbol{i}\partial E_2/\partial z+\boldsymbol{j}\partial E_1/\partial z$$

此外，在波形不改变的情况下，$\partial E_2/\partial z$ 的传播速度必须和 E_2 一样，而 $\partial E_1/\partial z$ 的速度必须和 E_1 一样。因此可以看到：(a)$\boldsymbol{H}$不存在 z 分量，所以 $\boldsymbol{H}$ 是一个纯粹的横波；(b)$\boldsymbol{H}$ 的 x 分量传播速度和 $\boldsymbol{E}$ 的 y 分量传播速度相同，它们组成了寻常波；(c)H 的 y 分量传播速度和 $\boldsymbol{E}$ 的 x 分量传播速度相同，它们组成了非常波。因此，寻常波和非常波是相互垂直偏振的。

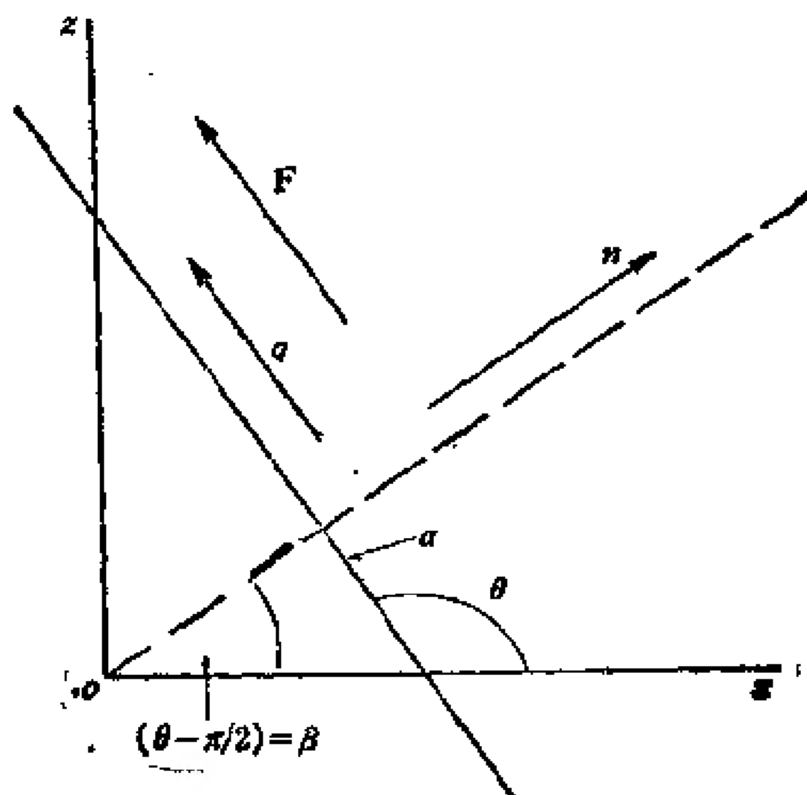


图 5·1

5.4.3 一种更一般的平面波在单轴晶体中传播的情况

假定，在如图 5·1 中所示的与 y 轴相平行的整个 α 平面上，E 均为恒量，那么所有的 y 导数都为零。令这些平面与 x 轴的正方向成夹角 θ，于是，这些平面的法线与 x 轴的正方向成夹角 $(\theta-\pi/2)=\beta$。沿着处在 α 平面内的任何方向上，E 和 H 的所有导数都为零。也就是说，图中的 $\partial E/\partial q=0$。根据方向导数公式，（这些公式可从 R. 科克尔所著的"微积分演算法"中找到）(R. Courant, Differential and Integral Calculus, volume2, page63, Blackie and Son, London and Glasgow, 1936)即

$$\partial/\partial x=\cos(-\beta)\partial/\partial n+\sin(-\beta)\partial/\partial q=\cos\beta\partial/\partial n$$

$$\partial/\partial z=-\cos\theta\partial/\partial n+\sin\theta\partial/\partial q=\sin\beta\partial/\partial n$$

所以，矩阵 P 变为

$$\begin{bmatrix} -\partial^2/\partial z^2 & 0 & \partial^2/\partial z\partial x \\ 0 & (-\partial^2/\partial x^2-\partial^2/\partial z^2) & 0 \\ \partial^2/\partial x\partial z & 0 & -\partial^2/\partial x^2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -\sin^2\beta\partial^2/\partial n^2 & 0 & \sin\beta\cos\beta\partial^2/\partial n^2 \\ 0 & -\partial^2/\partial n^2 & 0 \\ \sin\beta\cos\beta\partial^2/\partial n^2 & 0 & -\cos^2\beta\partial^2/\partial n^2 \end{bmatrix}$$

以及 $\boldsymbol{E}$ 的一般方程变为

$$A^T\begin{bmatrix} (S_1+\sin^2\beta\partial^2/\partial n^2 & 0 & (-\sin\beta\cos\beta\partial^2/\partial n^2) \\ 0 & \partial^2/\partial n^2+S_2 & \\ (-\sin\beta\cos\beta\partial^2/\partial n^2) & 0 & (S_2+\cos^2\beta\partial^2/\partial n^2) \end{bmatrix}$$

$$\times\boldsymbol{E}=0$$

即

$$\boldsymbol{i}[\sin^2\beta\partial^2E_1/\partial n^2+S_1E_1-\sin\beta\cos\beta\partial^2E_3/\partial n^2]$$
$$+\boldsymbol{j}[S_2E_2+\partial^2E_2/\partial n^2]$$
$$+\boldsymbol{k}[-\sin\beta\cos\beta\partial^2E_1/\partial n^2+S_2E_3+\cos^2\beta\,\partial^2E_3/\partial n^2]=0$$

令 $\boldsymbol{j}$ 的系数等于零，使 E_2 的波动方程与 5.4.1 节中的 E_2 相同，不过，现在是对 n 二次微分，而不是对 x 二次微分。这意味着，$\boldsymbol{E}$ 的 y 分量以速度 $1/\sqrt{(\mu K_2)}$ 沿着法线传播，其速度与法线的方向无关。$\boldsymbol{E}$ 的 y 分量是寻常波面的一部分，这里所求得的速度与 5.4.1 和 5.4.2 节中所得的速度都相一致。现在不能把 $\boldsymbol{E}$ 看作是纯粹的横波，也就是说，$\boldsymbol{E}$ 是处在 α 平面内。(可以通过 y 轴的选择，使 $\boldsymbol{E}$ 的 y 分量确实处于 α 平面内。)若矢量 $\boldsymbol{E}$ 的大小是 $|E|$，则

$$|E|^2=E_1^2+E_2^2+E_3^2=E_2^2+F^2$$

其中

$$F^2=E_1^2+E_3^2$$

式中，F 是 xz 平面内 E 分量的大小。通常分别用 F 的横向和纵向分量即 A 和 C 来进行运算。采用通常的坐标轴旋转公式(详见科菌编写的“微积分计算法”第二章第 6 页)可得

$$E_1=A\cos\beta-C\sin\beta$$

$$E_3=A\sin\beta+C\cos\beta$$

在 $\boldsymbol{E}$ 的一般方程中，令 $\boldsymbol{i}$ 的系数等于零，且代入 E_1 和 E_3 数值，稍许简化后，得

$$S_1A\cos\beta-S_1C\sin\beta-\sin\beta\partial^2C/\partial n^2=0$$

令 $\boldsymbol{k}$ 的系数等于零，得

$$\cos\beta\partial^2C/\partial n^2+S_2A\sin\beta+S_2C\cos\beta=0$$

消去最后两个方程中的 A(用 $S_2\sin\beta$ 与第一个方程相乘，用 $S_1\cos\beta$ 与第二个方程相乘，然后两者相减)，得

$$\partial^2C/\partial n^2(S_1\cos^2\beta+S_2\sin^2\beta)+S_1S_2C=0$$

将 S_1 和 S_2 数值都代入，并再次利用乘以 $-\omega^2$ 与对时间的二次微分相等效这个事实，得

$$\partial^2 U/\partial n^2=\frac{1}{\dfrac{\cos^2\beta}{\mu K_2}+\dfrac{\sin^2\beta}{\mu K_1}}\ \partial^2 U/\partial t^2=\frac{1}{N^2}\ \partial^2 U/\partial t^2$$

将上式和标准的波动方程相比，可以看到，平面波 $\boldsymbol{E}$ 以速度 N 沿着夹角 β 所规定的方向传播。（若 $\beta=0$，则 N 简化为 $1/\sqrt{(\mu K_2)}$；若 $\beta=\pi/2$，则 N 简化为 $1/\sqrt{(\mu K_1)}$。这些简单的结果与 5.4.1 节以及 5.4.2 节中的结论都相符。）

现在用下述公式来求磁场。

$$H=(1/\mu\omega)A^T\Delta E$$

因为所有的 y 导数现在都为零，所以，上式变为

$$\boldsymbol{H}=(1/\mu\omega)A^T\begin{bmatrix}0 & -\partial/\partial z & 0\\ +\partial/\partial z & 0 & -\partial/\partial x\\ 0 & +\partial/\partial x & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_1\\ E_2\\ E_3\end{bmatrix}$$

即

$$\boldsymbol{H}=\left(\frac{1}{\mu\omega}\right)\left[-\boldsymbol{i}\frac{\partial E_2}{\partial z}+\boldsymbol{j}\left(\frac{\partial E_1}{\partial z}-\frac{\partial E_3}{\partial x}\right)+\boldsymbol{k}\frac{\partial E_2}{\partial x}\right]$$

再次利用方向微分公式，上式变为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}=(1/\mu\omega)[&\boldsymbol{i}(-\sin\beta\partial E_2/\partial n)\\ &+\boldsymbol{j}(\sin\beta\partial E_1/\partial n-\cos\beta\partial E_3/\partial n)\\ &+\boldsymbol{k}(+\cos\beta\partial E_2/\partial n)]\end{aligned}$$

$\boldsymbol{H}$ 处在 xz 平面上的分量是 $\partial E_2/\partial n[-\boldsymbol{i}\sin\beta+\boldsymbol{k}\cos\beta]$。该分量的传播速度和 $\partial E_2/\partial n$ 一样，即和 E 的速度相同，亦即 $1/\sqrt{(\mu K_2)}$，对所有的传播方向它都是同一个速度 E。这是寻常波的磁场 H 部分，它与寻常波的电场 E 部分相垂直。可以看出，寻常波是一个纯粹的横波，它与 x 轴成 ϕ 夹角的正切值由下式给出：

$$\tan\phi=\frac{\boldsymbol{H}\text{ 的 }z\text{ 分量}}{\boldsymbol{H}\text{ 的 }x\text{ 分量}}=\frac{+\cos\beta}{-\sin\beta}=-\cot\beta$$